



# Caractérisation, modélisation et identification de sources de champ magnétique dans un véhicule électrique

Olivier Pinaud

## ► To cite this version:

Olivier Pinaud. Caractérisation, modélisation et identification de sources de champ magnétique dans un véhicule électrique. Energie électrique. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENT070 . tel-01122591v2

**HAL Id: tel-01122591**

**<https://hal.science/tel-01122591v2>**

Submitted on 10 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par **Olivier PINAUD**

Thèse dirigée par **Olivier CHADEBEC**

Co encadrée par **Laure-Line ROUVE**  
**Jean-Michel GUICHON**  
**Andréa VASSILEV**

Préparée au sein du **Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble**

Dans **l'École Doctorale Electrotechnique Electronique Automatique et  
Traitement du Signal**

## **Caractérisation, modélisation et identification de sources de champ magnétique dans un véhicule électrique**

Thèse soutenue publiquement le **13 Novembre 2014**

Devant le jury composé de :

**M. Stéphane CLENET**

Professeur des universités à l'ENSAM Paris Tech

(Rapporteur)

**M. Noël BURAI**

Professeur des universités à l'université Claude Bernard Lyon I

(Rapporteur)

**M. François COSTA**

Professeur des universités à l'ENS Cachan Paris Tech

(Examineur)

**M. Olivier CHADEBEC**

Chargé de recherche HDR du CNRS Grenoble

(Examineur)

**Mme. Laure-Line ROUVE**

Ingénieur de recherche Grenoble INP

(Examineur)

**M. Andréa VASSILEV**

Ingénieur de recherche au CEA Leti Grenoble

(Examineur)

**M. Jean-Michel GUICHON**

Maître de conférences à l'université Joseph Fourier

(Invité)





# Remerciements

---

Ce sont là les derniers mots que j'écris dans ce manuscrit et ce sont probablement les plus difficiles à trouver. La tradition les place en premier car ils sont importants et j'espère qu'ils sauront retranscrire toute ma gratitude envers celles et ceux qui m'ont entourés et aidés durant ces trois années.

Je commence naturellement par les membres du jury qui ont accepté de lire et analyser les travaux présentés dans ce mémoire.

Monsieur François Costa, Professeur des Universités de l'ENS Cachan Paris Tech, qui a su présider avec brio ma soutenance.

Monsieur Stéphane Clénet, Professeur des Universités de l'ENSAM Paris Tech, et Monsieur Noël Burais, Professeur des Universités de l'Université Claude Bernard Lyon I, qui ont eu la difficile tâche de lire en détail cet ouvrage enfin d'évaluer la qualité et l'originalité des apports scientifiques proposés. J'espère que mes réponses auront été aussi pertinentes que vos remarques et questions formulées au cours de nos échanges.

Je continue évidemment avec mes encadrants, devenus bien plus depuis et sans qui je n'aurais pas su relever les défis lancés par ces travaux.

Monsieur Olivier Chadebec, Chargé de recherche du CNRS Grenoble. Tu es venu me proposer ce sujet, tu m'as accordé toute ta confiance et même à distance depuis Florianópolis, tu as su m'aiguiller, toujours avec enthousiasme et énergie. Tes qualités humaines et scientifiques sont indéniables et je n'aurais pas pu rêver meilleur directeur.

Madame Laure-Line Rouve, Ingénieur de recherche de Grenoble INP. Tu m'as accueilli dans les locaux de l'ERT-CMF et ton suivi régulier m'a permis de garder le rythme. Nos nombreuses conversations, qu'elles aient été scientifiques ou non, furent très enrichissantes et je ne peux qu'espérer que cela perdure avec de futures collaborations.

Monsieur Jean-Michel Guichon, Maître de conférences de l'Université Joseph Fourier. Toujours de bon conseil, tu m'as aidé à prendre du recul en me posant les bonnes questions. Même si mes choix ont conduit vers un autre point de vue que le tien, purement modélisation, ton apport n'a pas été des moindres. Grâce à la plateforme MIPSE, tu as été mon fournisseur d'outil de calcul et nos échanges ont même permis le débogage de quelques codes : on remet ça quand tu veux.

Monsieur Andréa Vassilev, Ingénieur de recherche au CEA Leti de Grenoble. Nous avons essentiellement travaillé ensemble au début de ces travaux et j'aurais peut-être dû engager plus d'échanges sur la durée. Néanmoins, ton point vu très pragmatique, disons industriel, m'a permis de garder les pieds sur terre et je souhaite ici de remercier pour toutes tes remarques toujours très juste. J'espère réellement que l'avenir nous rassemblera de nouveau.

A nous cinq, je trouve que nous avons formé une belle équipe, soudée, où chacun apporte judicieusement ses compétences et j'espère que ces trois années ont été aussi agréables pour vous qu'elles l'ont été pour moi.

Ces travaux n'auraient pas été possibles sans financement ni moyens, humain ou matériel. Je veux ici remercier l'Institut Carnot Energies du Futur pour le financement de ma thèse ainsi que le CEA Leti pour leur accompagnement. De plus, je suis persuadé que le cadre de travail offert par le G2Elab a largement contribué au bon déroulement de ma recherche. Je tenais à le souligner et je formule ici mon amitié la plus sincère à tous ses membres.

Peu de travail accompli aurait pu l'être sans le concours de nombreuses personnes. Je cite en premier lieu les acteurs du projet européen EMSafety ainsi que l'équipe Monitoring de Véhicules Electriques du CEA Liten, sans qui je n'aurais pas eu accès à autant de véhicules pour les besoins de mon étude.

Je tiens à cœur de dire quelques mots à Steeve Zozor, Chargé de recherche du CNRS Grenoble, au GIPSA-lab. Ton apport, que ce soit en mathématique ou en statistique, a largement contribué au bon développement de mes travaux et je souhaite que nous puissions collaborer de nouveau à l'avenir.

Quelques mots également pour Jean-Louis Coulomb, Professeur Emérite de Grenoble INP dont on ne présente plus les nombreuses qualités humaines et scientifiques. Tu es toujours disponible au besoin, ton expérience et ton recul rendent tes analyses plus que percutantes et je tenais à te dire à quel point j'ai été honoré de ton aide : notamment pour la mise en place de l'étude paramétrique utilisant un algorithme innovant.

Arrivé au temps des validations expérimentales, je tiens à remercier Florian Dumas pour le développement de la maquette. Tu n'as pas pu me consacrer énormément de temps et pour cause, tu es aujourd'hui le seul mécanicien dans un si grand laboratoire et j'espère que l'avenir t'accordera plus de soutien.

Merci également à Philippe Le Thiec, toujours attentionné à mon égard, tu m'as fait profiter de ta très grande expérience dans le domaine de la mesure et de l'électronique. Je souhaite réellement pouvoir continuer à apprendre à tes côtés et j'espère que l'avenir me le permettra.

Merci aussi à Gilles Cauffet pour la mise à disposition d'un équipement d'acquisition et de traitement des mesures. De plus, ton entrain et ta bonne humeur quotidienne ont réussi à réveiller mon neurone fatigué lors de périodes difficiles.

C'est grâce à toutes ces personnes citées jusqu'ici que mes travaux de recherche ont pu avancer. Mais se seraient-ils déroulés de la même manière sans collègues proches avec qui discuter et partager ses doutes. Je tiens donc à remercier tout particulièrement Didier, Abir, Cédric, Pascal et Vinicius pour leur soutien lors de difficultés techniques mais également pour toutes nos discussions diverses et variées que nous avons pu avoir (gastronomie, cinéma, politique, etc.). Je souhaite que notre amitié naissante puisse perdurer et grandir malgré les distances liées aux activités professionnelles de chacun.

Merci également à Mounir, Gatien, Fabien et Vincent pour la logistique du pot de thèse.

Parmi vous tous, certains sont déjà docteur mais d'autres s'approchent de l'échéance et je vous souhaite, à tous, plein de réussite à venir.

Une pensée particulière à mes amis proches, extérieurs au laboratoire. Marc, pour ton soutien tout au long de ce projet, la relecture de ce manuscrit et tes commentaires plus que nécessaires lors d'un premier essai de présentation orale. Merci également à Sarah et Romain, Franck et Aurélie, Cindy et Jean-Louis, Cindy et Sébastien, pour tout l'intérêt que vous avez su porter à mes recherches et bien plus encore.

Je souhaite à présent terminer ces remerciements avec celles et ceux qui sont au plus profond de mon cœur : ma famille. Un très grand merci à mes parents, sans qui je ne serais jamais arrivé là. Vous m'avez toujours soutenu, toujours fait confiance et j'espère avoir participé à votre bonheur. Les mots ne suffisent pas à exprimer tout l'amour que j'ai pour vous et je vous serais éternellement reconnaissant. Enfin, merci à Eléonore,..., ma meilleure amie, ma confidente,..., ma future femme. Tu es présente à chaque instant, prête à me suivre au bout du monde : je t'aime.

*A la mémoire de Mado et Dédé*



# Sommaire

---





<b><i>Remerciements</i></b>	<b>3</b>
<b><i>Sommaire</i></b>	<b>7</b>
<b><i>Introduction générale</i></b>	<b>13</b>
<b><i>Chapitre I :</i></b>	<b>19</b>
<b><i>Analyse du champ magnétique dans l'habitacle de véhicules électriques</i></b>	<b>19</b>
<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>I.1. Le contexte des mesures</b>	<b>22</b>
I.1.1. Les véhicules	22
I.1.2. Le matériel de mesure	22
I.1.3. La mise en place des capteurs	23
I.1.4. Le protocole des essais	24
<b>I.2. Résultats des mesures</b>	<b>25</b>
I.2.1. Véhicule en position fixe	25
I.2.2. Véhicule en mouvement et équipements éteints	29
I.2.3. Véhicule en mouvement et fonctionnement complet	33
<b>I.3. Calcul de l'exposition au champ magnétique</b>	<b>37</b>
I.3.1. Définitions	37
I.3.2. Placement des niveaux mesurés sur le gabarit	39
I.3.3. Calcul du critère $n^{\circ}2$ et résultats	40
<b>Conclusions intermédiaires</b>	<b>43</b>
<b><i>Chapitre II :</i></b>	<b>45</b>
<b><i>Modélisation magnétostatique en problème direct</i></b>	<b>45</b>
<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>II.1. Environnement de la modélisation</b>	<b>48</b>
II.1.1. Les différentes sources de champ	48
II.1.2. Méthode numérique de modélisation	49
II.1.3. Méthodologie de modélisation	50
<b>II.2. Modélisations physiques</b>	<b>52</b>
II.2.1. Eléments ferromagnétiques	52
II.2.2. Boucles de courant	59
<b>II.3. Vers une réduction du champ magnétique créé par le circuit de puissance</b>	<b>63</b>
II.3.1. Validation du modèle	63
II.3.2. Analyse des pistes d'amélioration	64
II.3.3. Mise en œuvre numérique des modifications	66
<b>Conclusions intermédiaires</b>	<b>69</b>

<b>Chapitre III :</b>	<b>71</b>
<b>Décomposition harmonique du champ magnétique</b>	<b>71</b>
<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>III.1. Rappels sur la résolution des équations de Maxwell</b>	<b>74</b>
<b>III.2. Ecriture harmonique en deux dimensions (2D)</b>	<b>75</b>
III.2.1. Ecriture du potentiel vecteur magnétique	75
III.2.2. Calcul des coefficients harmoniques	76
III.2.3. Etude du champ en problème interne	79
<b>III.3. Développement multipolaire 3D</b>	<b>84</b>
III.3.1. Potentiel scalaire et induction magnétique	84
III.3.2. Projection sur les fonctions harmoniques sphériques	86
III.3.3. Application au modèle direct développé	87
<b>Conclusions intermédiaires</b>	<b>95</b>
<b>Chapitre IV :</b>	<b>97</b>
<b>Résolution du problème inverse par inférence Bayésienne</b>	<b>97</b>
<b>Introduction</b>	<b>99</b>
<b>IV.1. Introduction aux problèmes inverses</b>	<b>100</b>
IV.1.1. Paramétrisation et caractère bien ou mal posé du problème	100
IV.1.2. Outils pour la résolution des problèmes inverses	101
IV.1.3. Application au modèle des boucles de courant	103
<b>IV.2. L'approche statistique du problème inverse</b>	<b>109</b>
IV.2.1. La régularisation de Tikhonov	109
IV.2.2. L'inférence Bayésienne	110
IV.2.3. Evaluation des termes matriciels	114
<b>IV.3. Validations numériques</b>	<b>118</b>
IV.3.1. Modèle étudié et définition de l'information <i>a priori</i>	118
IV.3.2. Configuration du problème inverse	122
IV.3.3. Résultats	122
<b>Conclusions intermédiaires</b>	<b>128</b>
<b>Chapitre V :</b>	<b>129</b>
<b>Validations expérimentales</b>	<b>129</b>
<b>Introduction</b>	<b>131</b>
<b>V.1. Présentation des moyens expérimentaux</b>	<b>132</b>
V.1.1. Les moyens de mesure et d'acquisition	132
V.1.2. La description de la maquette	134
<b>V.2. Prise en main des outils expérimentaux</b>	<b>134</b>

V.2.1.	Positionnement des capteurs	134
V.2.2.	Evaluation des incertitudes de mesure	135
V.2.3.	Modélisation de la maquette	137
<b>V.3.</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>138</b>
V.3.1.	Protocole de mesure et hypothèses	138
V.3.2.	Système mesuré et information <i>a priori</i>	139
V.3.3.	Mesures proches de la sphère d'étude	140
V.3.4.	Mesures éloignées de la sphère d'étude	144
	<b>Conclusions intermédiaires</b>	<b>154</b>
	 <i>Conclusion générale et perspectives</i>	 <b>155</b>
	 <i>Annexes</i>	 <b>161</b>
	<b>A : Définition des polynômes de Legendre</b>	<b>163</b>
	<b>B : Harmoniques sphériques et polynômes de Legendre associés</b>	<b>165</b>
	<b>C : Projection de la composante radiale de l'induction magnétique sur les fonctions harmoniques sphériques</b>	<b>166</b>
	<b>D : Complément de calcul du maximum de vraisemblance</b>	<b>168</b>
	<b>E : Complément de calcul du maximum a posteriori</b>	<b>169</b>
	<b>F : Calcul analytique de la matrice de covariance <math>S_0</math> de l'information <i>a priori</i> pour un cas d'étude en deux dimensions</b>	<b>171</b>
	<b>G : Evaluation de la matrice de covariance « <math>S_0</math> » soit par la méthode de Monte-Carlo soit avec l'algorithme « Unscented Transform »</b>	<b>180</b>
	 <i>Bibliographie</i>	 <b>183</b>



# Introduction générale

---



## *L'histoire du magnétisme en quelques lignes*

Depuis aussi longtemps que la planète Terre existe, celle-ci crée un champ magnétique qui l'enveloppe. Cela provient de la composition de son noyau, principalement du fer (environ 80%) et du nickel (environ 20%) divisé en deux phases. Le noyau interne est considéré comme solide et le noyau externe est un métal en fusion brassé par convection d'origine essentiellement thermique (température moyenne de 4000°C). Dans ce noyau externe, matière conductrice en fusion, se développent des courants qui créent un champ magnétique, renforçant à son tour les courants : c'est l'effet dynamo. C'est en partie grâce à ce champ que la vie a pu se développer car il protège la Terre des incessants rayonnements ionisants provenant du soleil.

Le magnétisme définit alors une force capable d'attirer ou de repousser certains éléments. Cela s'observe très facilement avec des aimants et ce phénomène a d'ailleurs été découvert très tôt dans l'histoire de l'humanité : en Chine dès le II<sup>e</sup> siècle avant JC, la magnétite (matière naturellement aimantée) est utilisée pour la création de tables divinatoires, ce qui a ensuite conduit à la naissance de la boussole (I<sup>e</sup> siècle de notre ère).

Ce géomagnétisme est donc connu depuis longtemps mais les premières études n'apparaissent vraiment qu'à la fin du XI<sup>e</sup> siècle en Occident. Il faudra ensuite attendre la fin du XIX<sup>e</sup> siècle pour que le physicien James Clerk Maxwell publie une série d'équations, synthétisant en quelques lignes les travaux de plusieurs chercheurs (tels que Charles-Augustin Coulomb, Hans Christian Oersted, André-Marie Ampère ou encore Michael Faraday).

Ces « équations de Maxwell » unifient alors une fois pour toutes l'électricité et le magnétisme en un seul et même domaine : l'électromagnétisme. Dès lors, de spectaculaires avancées ont conduit aux utilisations faites de nos jours dans de nombreux domaines (radio télécommunication, électrotechnique, médical, etc.).

## *Les enjeux autour de l'énergie électrique*

L'énergie électrique est un vecteur fort de développement et ne cesse d'accroître son importance en s'imposant partout. Nous le remarquons dans de nombreux domaines. Dans le transport : qu'il soit routier (véhicules électriques ou hybrides), ferroviaire (avec le TGV ou les tramways), maritime (les paquebots sont de véritables villes sur l'eau) ou aérien (les projets d'avion tout électrique). Dans l'habitat qui devient intelligent et même producteur d'énergie (grâce à l'éolien ou le photovoltaïque) ou encore dans l'industrie avec de plus en plus de machines électriques qui automatisent les tâches.

Cet essor de l'énergie électrique a été rendu possible par les grandes avancées faites au niveau de la production, du transport/distribution et de la conversion. Le développement de l'électronique de puissance permet la conversion de toujours plus de puissance dans des volumes de plus en plus restreints. Ce résultat est le fruit de nombreux progrès en matière de technologie des composants, de contrôle commande et des études de compatibilité électromagnétiques (CEM).



La CEM a pour objectif principal de garantir la sûreté fonctionnelle des équipements. Elle comporte deux volets : les effets conduits par les câbles électriques (ou toute matière conductrice) et les effets rayonnés dans l'environnement proche. Si les premiers sont aujourd'hui relativement bien pris en compte dès la phase de conception, les seconds le sont bien moins à cause de la complexité des phénomènes. Ainsi un produit fini (convertisseur de puissance par exemple) n'est validé qu'après de lourdes mesures du rayonnement électromagnétique en chambre anéchoïque. Ces mesures garantissent le bon fonctionnement et atteste également du respect des normes sanitaires pour la protection des personnes. En effet, la question des effets biologiques du champ électromagnétique sur l'Homme n'est pas une question récente [BOSAVIT 93] et reste toujours d'actualité [BARCHANSKI 07], [BOHNERT 10], [FRESCHI 10].

La prise en compte de ces phénomènes rayonnés dès la conception est alors un enjeu de taille : en atteste quelques exemples de travaux de recherche réalisés sur la thématique [VINCENT 09], [LOPEZ 11], [YAHYAOUY 11], [MITOLO 11] qui traitent du rayonnement d'un élément électrotechnique : un convertisseur de puissance, le câblage associé, un composant électronique, un moteur ou même un transformateur.

### *Notre problématique*

Véritable concentré technologique, un véhicule embarque aujourd'hui de nombreux équipements électrotechniques de plus ou moins forte puissance dans un volume restreint. Une question se pose alors : quel est le champ électromagnétique produit par une telle concentration d'équipements électrotechniques fonctionnant tous ensemble ? Il nous faut en effet savoir assurer le fonctionnement du système complet d'une part et pouvoir garantir la sûreté sanitaire des usagers d'autre part.

Il semble illusoire de développer un seul et même modèle capable de rendre compte des champs électromagnétiques dus à plusieurs dispositifs électrotechniques. Certaines limitations pratiques telles que la puissance de calcul ou plus simplement la mise en œuvre (beaucoup trop de paramètres) empêchent l'étude directe de ces systèmes. Si une telle modélisation était atteignable, ce serait au prix de beaucoup d'efforts et le résultat resterait intimement lié aux observations. Les incertitudes de réalisation des systèmes rendraient alors le modèle obsolète qui devrait être retravaillé à chaque fois.

Répondre au problème en plaçant énormément de capteurs à l'intérieur de la zone étudiée paraît également difficilement réalisable. Sans parler du coût financier d'une telle solution, elle n'est surtout pas viable car pour rester dans le contexte du véhicule électrique, la présence des passagers interdit une telle mise en œuvre.

Alors comment étudier le champ électromagnétique global créé par un système faisant intervenir plusieurs équipements électrotechniques potentiellement mal connu ? Cela conduit à une problématique générale en matière de rayonnement : **être capable d'évaluer avec précision à chaque instant, le champ magnétique en tout point d'une zone d'étude quelles que soient les sources en présence.**

Des éléments de réponses doivent alors être apportés par l'étude du champ magnétique dans l'habitacle d'un véhicule électrique, tout en limitant la partie modélisation et en ne plaçant qu'un nombre très limité de capteurs autour de la zone étudiée.

### Notre démarche

Des travaux ont déjà été menés sur la thématique du rayonnement magnétique mais ces derniers placent un seul équipement au centre de la zone d'étude qui se situe tout autour. Au contraire, notre étude place plusieurs équipements tout autour de la zone étudiée : il est alors nécessaire de changer de point de vue. Nous nous proposons d'apporter une réponse à la problématique en nous appuyant sur les savoir-faire du laboratoire dans les thématiques de la modélisation, de la mesure et du problème inverse champ magnétique faible en génie électrique.

Riche des travaux déjà réalisés sur l'identification de sources par mesure de champ proche autour des dispositifs ([LEGRIS 96], [CHADEBEC 01], [SCHMERBER 06], [VUILLERMET 08], [VINCENT 09], [LE NY 12]), nous proposons cette fois l'étude du champ magnétique à l'intérieur d'une zone fermée, entourée des sources.

Le champ magnétique est décrit par le formalisme des harmoniques sphériques. Cette écriture très générale met en jeu un nombre limité de paramètres alors identifiés grâce à la mesure du champ en quelques points. Le problème inverse ainsi étudié, largement sous-déterminé, est résolu par approche statistique grâce à un apport d'information *a priori* (Théorème de Bayes).

Le présent mémoire de thèse s'articule autour de cinq chapitres pour présenter les travaux réalisés dans ce contexte particulier qui vise l'étude du champ magnétique dans l'habitacle d'un véhicule électrique.

- Le chapitre 1 positionne le contexte d'étude de façon détaillée. Par l'intermédiaire d'un projet Européen « EMSafety », plusieurs véhicules électriques ont été testés pour mesurer le champ magnétique à l'intérieur de l'habitacle. Ce chapitre présente donc les principaux résultats des analyses menées afin d'évaluer les principales caractéristiques (amplitude et spectre fréquentiel) du champ magnétique mesuré. La comparaison de ces résultats avec les recommandations internationales permet enfin de conclure objectivement sur l'état actuel des niveaux du champ magnétique dans l'habitacle des véhicules électriques.
- Le chapitre 2 présente la modélisation par problème direct du champ magnétostatique dû à certaines sources observées. Cette étape aide à la compréhension des phénomènes mesurés et le modèle physique présenté est obtenu de manière itérative en capitalisant sur les observations (mesures). Le résultat permet ensuite l'analyse de l'influence prépondérante de certains paramètres physiques sur la répartition du champ magnétostatique dans l'habitacle.

- Le chapitre 3 illustre l'intérêt de l'écriture en harmonique sphérique du champ magnétique afin de réduire le nombre de paramètres de description (mathématiques plutôt que physiques). Ce formalisme est pris en mains avec une illustration en deux dimensions puis il est appliqué au modèle développé dans le chapitre précédent pour décrire le champ dans une zone d'étude. Le résultat sera source d'information pour l'identification par problème inverse de l'écriture harmonique.
- Le chapitre 4 introduit le problème inverse et les différentes méthodes de résolution. Nous nous concentrons plus particulièrement sur sa résolution par approche statistique avec le théorème de Bayes. Les différents éléments de ce théorème sont expliqués et quelques illustrations numériques démontrent l'intérêt de cette approche pour notre problématique. Grâce au couplage du modèle (information *a priori* provenant des chapitres précédents) et de la mesure du champ magnétique, l'identification des coefficients harmoniques sphériques est performante.
- Le chapitre 5 résume les résultats expérimentaux mis en œuvre dans le but de valider la démarche choisie. La maquette développée est présentée, les hypothèses formulées et la mise en pratique de l'approche complète (couplant modélisation, mesure et problème inverse) démontre la validité de notre démarche afin de répondre à l'objectif.

Enfin, pour terminer ce manuscrit, les conclusions générales reprennent les points clés de ces travaux et les perspectives ouvrent l'horizon à de futurs développements.

## Chapitre I :

# Analyse du champ magnétique dans l'habitacle de véhicules électriques



## Introduction

Les véhicules électriques ou hybrides connaissent aujourd'hui un engouement général. Un bel essor qui est permis grâce aux avancées faites en électronique de puissance, en chimie des batteries et en contrôle-commande. Si ces types de véhicule sont la démonstration même que le génie électrique s'imisce partout, il faut noter que c'est aussi le cas pour les véhicules dit conventionnels. En effet, le véhicule moderne est un véritable concentré technologique et embarque un complexe réseau de capteurs, d'unités de calcul et d'actionneurs électromécaniques jusque dans les sièges. On remarque d'ailleurs que la puissance électrique du réseau de bord n'a cessé de croître : passant d'environ 500 W en 1980 contre plus de 5 kW aujourd'hui.

Dans ce contexte, les pouvoirs publics et l'Europe doivent répondre à la question de l'exposition aux champs magnétiques générés par tous ces équipements électrotechniques dans une zone confinée qui est l'habitacle d'un véhicule électrique. Des études ont déjà été menées sur le sujet dans le domaine du transport en général : par exemple aux Etats-Unis [DIETRICH 99], en Autriche [SCHMID 09], en Australie [HALGAMUGE 10], en Grèce [KARABETSOS 10] ou en Espagne [POUS 11]. L'analyse de ces documents conduit aux conclusions suivantes :

- Grande complexité des champs magnétiques mesurés
- Grande plage de fréquences : du continu à plusieurs dizaines de kilohertz
- Les niveaux maximum de champ sont en quasi-statique
- Forte variabilité spatiale et temporelle du champ

Il en ressort cependant la non-coordination de ces études et la difficulté de généralisation des résultats obtenus. En conséquence, le projet Européen « EMSafety<sup>1</sup> » a vu le jour en Juin 2011. Pour une durée de 36 mois, il implique des universitaires et des industriels dont les principaux objectifs sont les suivant :

- Définir un protocole d'étude
- Réaliser des mesures représentatives des niveaux de champ
- Etudier la faisabilité d'intégration de capteurs de champ dans le véhicule
- Définir des règles générales visant les réalisations électriques qui limitent la création de champ

Par l'intermédiaire de ce projet, nous avons eu accès à plusieurs véhicules électriques et participé à la réalisation des mesures représentatives des niveaux de champ dans l'habitacle. Tout ceci n'est bien sûr qu'un prétexte pour étudier un cas concret représentatif de notre problématique plus générale : l'étude du champ magnétique à l'intérieur d'une zone (ici c'est l'habitacle d'un véhicule électrique) entourée par les sources (les équipements électrotechniques embarqués). Ce premier chapitre s'attelle donc à présenter les principaux résultats des mesures effectuées dans la bande fréquence 0 Hz-300 kHz (basses fréquences).

---

<sup>1</sup> <http://www.sintef.no/Projectweb/EM-Safety/>

## I.1. Le contexte des mesures

### I.1.1. Les véhicules

Par l'intermédiaire du projet Européen « EMSafety », nous avons eu accès à plusieurs véhicules de conception plus ou moins récente (de 1990 à 2010), faisant intervenir différentes technologies de traction (moteur courant continu, synchrone ou asynchrone) et avec différentes architectures (électrique ou hybride).

Nous considérons que le panel de véhicule mesuré est suffisamment représentatif pour répondre à la question des niveaux d'exposition aux champs magnétiques. Pour des raisons évidentes de confidentialité, nous ne citerons les véhicules qu'à travers une numérotation en précisant les principales caractéristiques de chacun : éléments présentée par le Tableau I.1 ci-dessous.

	Architecture électrique	Technologie du moteur de traction	Puissance maximale de traction (kW)	Energie électrique embarqué (kWh)
1	Batterie	Courant continu	20	12
2	Hybride rechargeable	Synchrone à aimants permanents	30	5
3	Hybride	Asynchrone	10	0,7
4	Batterie	Synchrone à aimants permanents	10	14
5	Batterie	Asynchrone	34	24,5
6	Batterie	Synchrone à aimants permanents	40	24
7	Pile à combustible	Synchrone à aimants permanents	100	1,4
8	Batterie	Synchrone à aimants permanents	34	16

Tableau I.1 : Liste numérotée des véhicules mesurés

### I.1.2. Le matériel de mesure

On ne s'intéresse qu'au champ magnétique émis dans le domaine du génie électrique : c'est-à-dire dans la bande des fréquences comprises entre 0 Hz et 300 kHz. Nous l'appellerons de manière générique par le terme « basses fréquences ». Les capteurs mis en œuvre permettent donc la mesure des champs magnétiques du continu jusqu'à plusieurs dizaines de kilohertz et le Tableau I.2 présente leurs principales caractéristiques.

L'équipement de marque Narda (EHP-50D) est un analyseur de champ. Il possède sa propre batterie et unité de calcul spectral. Il peut soit être connecté à un ordinateur pour la configuration et la visualisation du spectre, soit fonctionner de manière autonome et enregistrer les valeurs maximales mesurées selon la configuration.

Les magnétomètres de marque Bartington, nécessitent quant à eux la mise en place d'une alimentation électrique et d'un outil d'acquisition des signaux temporels. Le premier point est réalisé grâce à des batteries et le second par l'utilisation d'une centrale d'acquisition (Figure I.1). Cette centrale d'acquisition enregistre les signaux temporels échantillonnés et est également dotée d'une unité de calcul permettant l'analyse fréquentielle en temps réel.

Référence	Type de capteur	Bande passante	Plage de mesure	Niveau de bruit
<b>Bartington Mag-03MS</b>	Magnétomètre fluxgate avec 3 axes encapsulés orthogonaux.	0 Hz – 2 kHz	$\pm 100 \mu\text{T}$	$<1\text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ @ 1Hz
			$\pm 250 \mu\text{T}$	
			$\pm 500 \mu\text{T}$	
<b>Bartington Mag-03IE</b>	Magnétomètre fluxgate avec 3 axes indépendants.	0 Hz – 2 kHz	$\pm 100 \mu\text{T}$	
<b>Narda EHP-50D</b>	Analyseur de champ électrique et magnétique à 3 axes isotropiques	5 Hz – 100 kHz	De 5mV/m à 100kV/m	5mV/m
			De 0.3nT à 10mT	0.3nT

Tableau I.2: Principales caractéristiques des capteurs de champ mis en œuvre



Figure I.1 : Centrale d'acquisition (à droite), ordinateur de contrôle et de visualisation (à gauche) et batterie d'alimentation des magnétomètres (en bas)

### I.1.3. La mise en place des capteurs

Un des objectifs du projet « EMSafety », pour lequel nous avons participé, est la réalisation de mesures représentatives du niveau d'exposition aux champs magnétiques basses fréquences dans les véhicules électriques. Le terme « exposition » implique la mesure au niveau des personnes et nécessite la mise en place d'un mannequin pour le support des capteurs (Figure I.2). Celui-ci est en plastique et est positionné à la place du passager avant du véhicule. Il est équipé (ci-dessous pour exemple) de trois magnétomètres et de l'analyseur de champ. Les magnétomètres sont placés à hauteur de la tête du passager (plage de mesure  $\pm 100 \mu\text{T}$ ), au niveau de l'assise (plage de mesure  $\pm 250 \mu\text{T}$ ) et au niveau des pieds du passager (plage de mesure  $\pm 500 \mu\text{T}$ ).



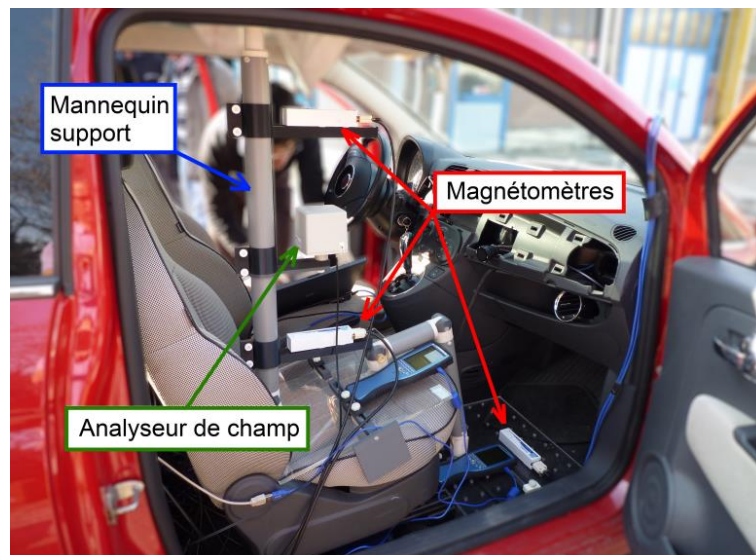


Figure I.2 : Mannequin support équipé des capteurs

Ce positionnement des magnétomètres (en fonction des plages de mesure) suit l'hypothèse que le niveau de champ est probablement plus important vers le bas de l'habitacle. Cette hypothèse est justifiée en raison du placement des potentielles sources de champ : les équipements électrotechniques embarqués ou les câbles de puissance.

En suivant cette logique, on sait que de forts courants continus se développent dans le pack batterie. En conséquence, selon l'essai réalisé (détaillé plus tard), nous placerons également un magnétomètre à proximité du pack batterie.

#### I.1.4. Le protocole des essais

Les sources de champ étant potentiellement nombreuses (embarquées par le véhicule ou liées à l'environnement), il semble nécessaire de procéder avec méthode. Nous avons alors proposé une démarche de mesure des niveaux de champ en plusieurs étapes.

Une première partie se déroule avec le véhicule placé de manière fixe dans son environnement. L'objectif est l'identification du champ émis par chacun des équipements embarqués. Cela consiste, dans la mesure du possible, à mettre en état de fonctionnement chaque équipement, un à un, afin de mesurer le champ émis en différents points. Cette étape est longue mais très riche d'information.

Une seconde partie se déroule avec le véhicule en mouvement mais éteint (aucun fonctionnement des équipements embarqués). Cette étape permet essentiellement l'identification de l'influence du champ magnétique terrestre et des perturbations extérieures sur un parcours donné.

La dernière partie se déroule avec le véhicule en mouvement et en état de fonctionnement complet. Ces essais se déroulent sur le parcours identifié plus tôt et permettent deux choses : mesurer le champ lorsque tous les équipements fonctionnent et identifier l'influence d'éléments de puissance (pack batterie et câbles associés par exemple).

## I.2. Résultats des mesures

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été sélectionnés pour leurs caractéristiques « remarquables ». On comprend bien que selon le véhicule, l'influence d'un même type d'équipement diffère et pourrait ainsi être indétectable (c'est-à-dire que le signal recherché est inférieur au niveau de champ lié à l'environnement). En définitive, les mesures traitées ici proviennent de plusieurs véhicules mais nous tâcherons de toujours faire référence au Tableau I.1.

### I.2.1. Véhicule en position fixe

Rappelons que cette partie des essais consiste, dans la mesure du possible, à analyser l'influence de chaque équipement séparément. Les résultats obtenus sont valides sous l'hypothèse que l'environnement magnétique ne varie pas pendant la durée de l'essai (hypothèse vérifiée à chaque fois par comparaison des mesures avant et après fonctionnement de l'équipement étudié).

Cette partie s'attache donc à étudier le champ magnétique émis par chaque équipement que tout véhicule embarque sur son réseau de bord en basse tension. Nous ne présenterons bien que la partie utile de l'essai, l'analyse de l'équipement en question.

#### *La ventilation de l'habitacle (véhicule n°=2)*

Le test se déroule comme suit : la ventilation est d'abord éteinte puis progressivement commandée par palier vers sa consigne maximale.

Il paraît naturel que la puissance demandée au réseau de bord sera plus ou moins importante en fonction de la vitesse de ventilation. La tension du réseau restant constante, la valeur du courant électrique circulant devrait varier en conséquence (Figure I.3 (a)). Comme tout courant électrique crée un champ magnétique, nous devrions donc être en mesure d'observer le même phénomène sur le champ magnétique environnant.

La mesure de ce champ magnétique selon les trois axes du magnétomètre placé à hauteur de la tête du passager avant est présentée Figure I.3 (b). On observe effectivement une corrélation temporelle entre la quantité de courant circulant sur le réseau de bord et la valeur du champ magnétique. Dès la mise en fonctionnement de la ventilation (autour de 40 sec), l'augmentation du courant entraîne une variation mesurable du champ magnétique et ainsi de suite jusqu'à la commande maximale.

Nous relevons la variation totale du module du champ magnétique entre le début de l'essai (ventilation éteinte) et la fin de l'essai (ventilation en vitesse maximale). Cette variation pour le passager avant du véhicule, est de 530 nT à hauteur de la tête, 2430 nT au niveau de l'assise et 1148 nT au niveau des pieds.

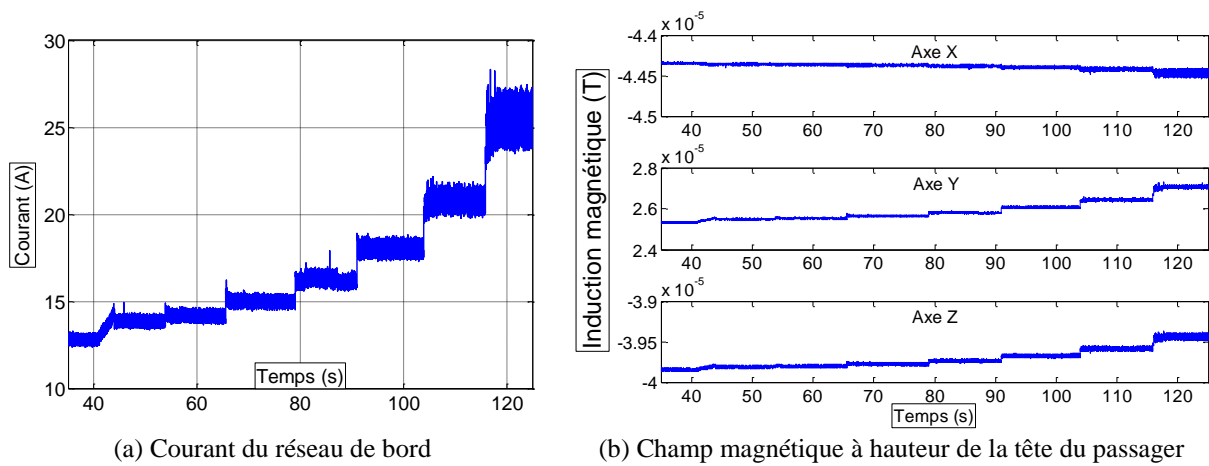


Figure I.3 : Mesures temporelles lors de l'essai d'identification d'influence du système de ventilation

Ainsi en première approche, nous devrions être capables d'établir un lien entre la puissance globale consommée sur le réseau de bord et le niveau de champ magnétique induit dans l'habitacle.

Cependant pour aller plus loin dans l'identification de cette source, il est judicieux d'observer le spectre fréquentiel et l'analyse conjointe en temps et en fréquence s'avère alors très utile.

L'analyse de la valeur moyenne venant d'être traitée, celle-ci sera retranchée (par palier au cours de l'essai) afin de se concentrer sur le contenu fréquentiel. La Figure I.4 illustre le diagramme temps-fréquence du courant électrique lors de cet essai tandis que la Figure I.5 présente le diagramme temps-fréquence de l'axe X du magnétomètre placé à hauteur de la tête du passager avant.

Malgré le retrait de la valeur moyenne, par soucis de lisibilité, les diagrammes temps-fréquence présentés illustrent la densité de puissance du signal en dB.

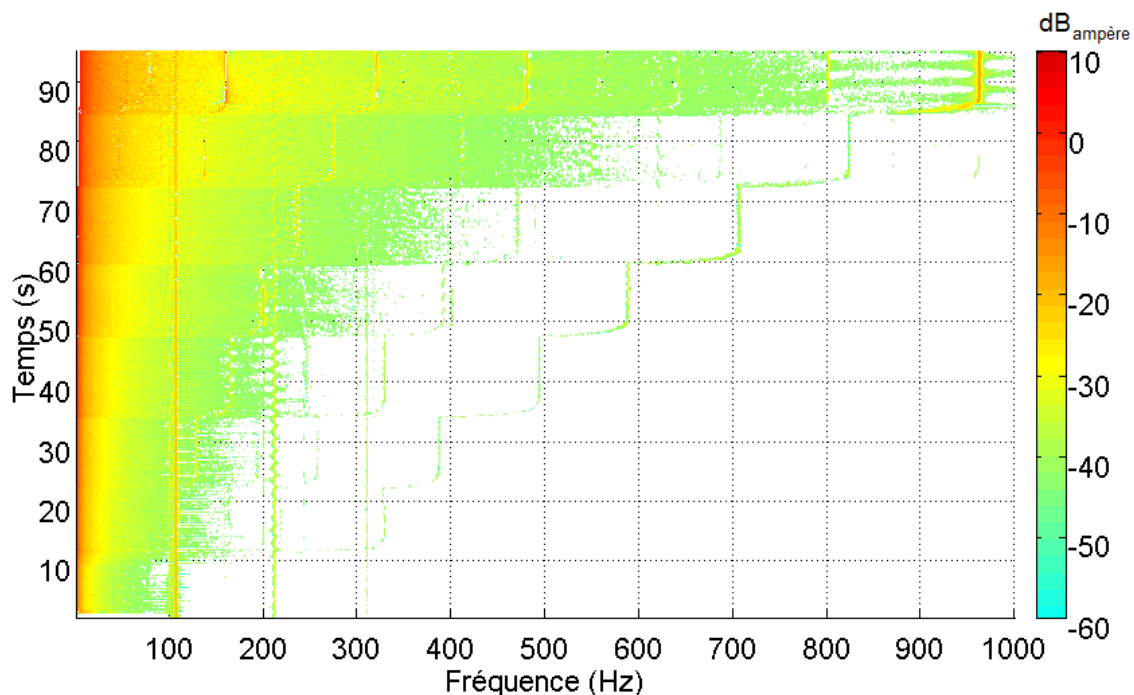


Figure I.4 : Diagramme temps-fréquence du courant lors de l'essai « ventilation de l'habitacle »

On remarque la mise en fonctionnement du véhicule autour de 20 secondes. Dès lors, des composantes fréquentielles (105 Hz, 210 Hz et 315 Hz) apparaissent et ne varient pas pendant l'essai. Celles-ci sont dues au fonctionnement intrinsèque du véhicule dont nous n'avons pas pu nous affranchir.

On observe également une série de composantes fréquentielles qui varient en fonction de la vitesse de ventilation. Le moteur associé (probablement de type universel) génère des perturbations sur le réseau de bord lorsqu'il prélève le courant électrique assurant son fonctionnement. Ces perturbations périodiques deviennent alors plus fréquentes lorsque la vitesse de ventilation augmente : expliquant ainsi les variations fréquentielles.

En fin d'essai, alors que la vitesse de ventilation est maximale, les fréquences observées sont : 160 Hz, 320 Hz, 480 Hz, 640 Hz, 800 Hz et 960 Hz. Même si la majeure partie de la puissance se trouve dans la composante continue (la valeur moyenne), on remarque que l'oscillation du courant devient plus forte avec l'augmentation de la vitesse (cf. Figure I.3 (a)) et cela s'observe également sur l'amplitude des composantes spectrales. Ces mêmes caractéristiques s'observent sur le diagramme temps fréquence du champ magnétique. Il faut cependant ajouter l'influence de l'ambient à la fréquence de 50 Hz due au réseau électrique EDF.

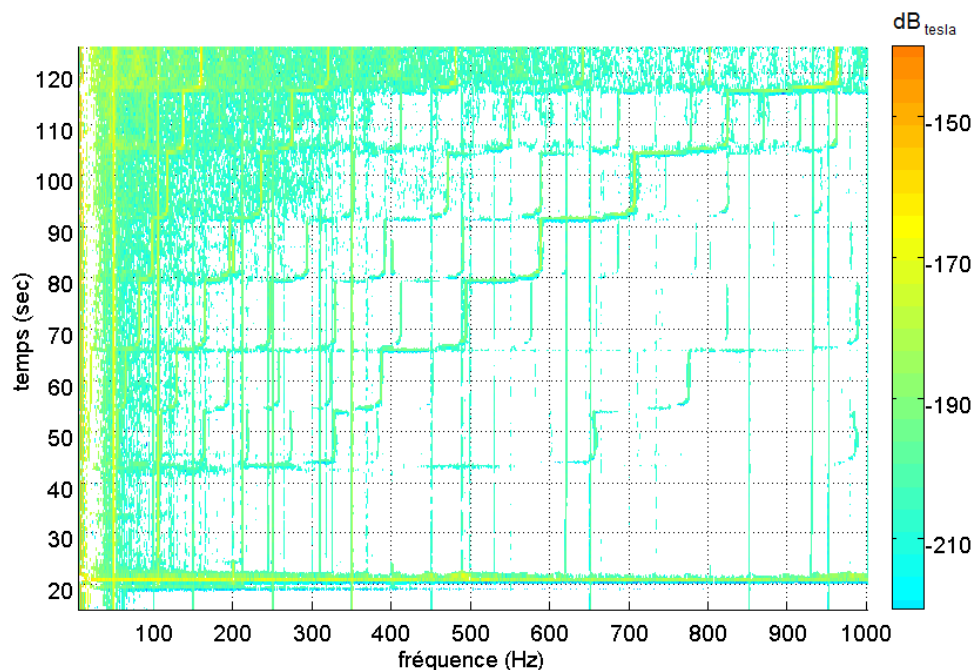


Figure I.5 : Diagramme temps-fréquence de l'induction mesurée sur l'axe X du capteur à hauteur de tête lors de l'essai « ventilation de l'habitacle »

Le Tableau I.3 récapitule alors les principaux éléments relevés lors de l'étude fréquentielle de cet équipement.

Point de mesure	Liste des fréquences en Hz (vitesse de ventilation maximale)	Module maximum hors valeur moyenne	Correspondance en dB <sub>puissance</sub>
Tête	160 – 320 – 480 – 640 – 800 – 960	11nT @ 160Hz	-159,2
Assise	160 – 320 – 480 – 640 – 800 – 960	17nT @ 160Hz	-155,4
Pieds	160 – 320 – 480 – 640 – 800 – 960	104nT @ 160Hz	-139,7

Tableau I.3 : Principales caractéristiques fréquentielles du champ émis par la ventilation de l'habitacle du véhicule n°=2

### Les pompes électriques (véhicule n°=1)

La même méthode d'analyse est appliquée pour l'étude du champ émis par les moteurs électriques présent dans les différentes pompes. La Figure ci-dessous illustre l'emplacement de celles-ci.

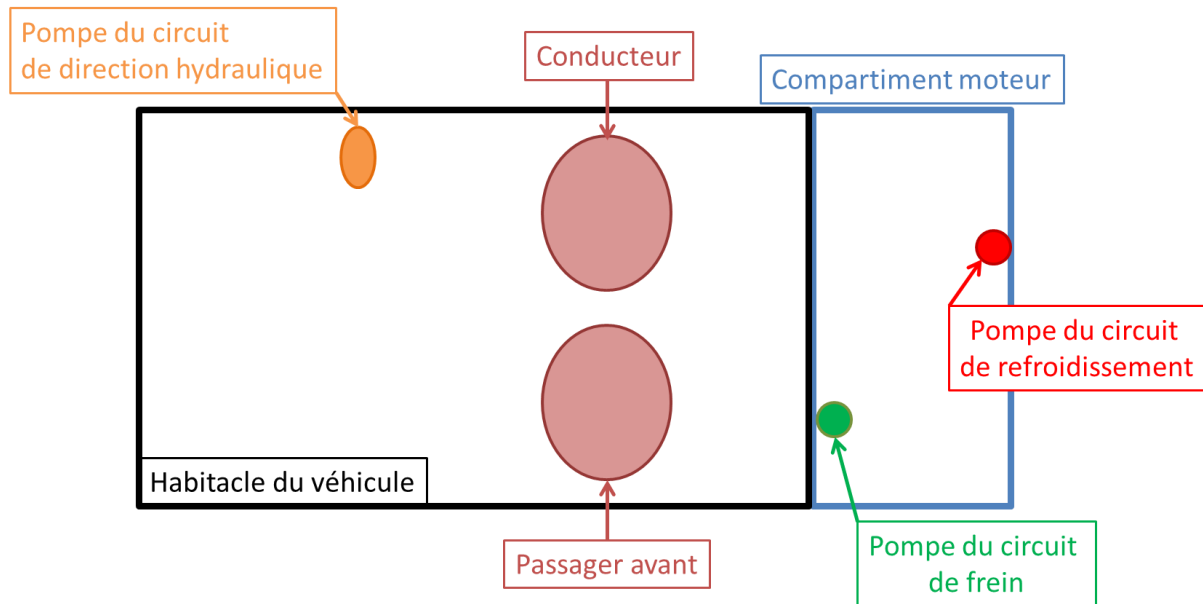


Figure I.6 : Schéma de positionnement des diverses pompes du véhicule n°=1

Chacun des moteurs possède une signature fréquentielle qui lui est propre :

- L'analyse du courant consommé par la pompe à eau du circuit de refroidissement, lorsque celle-ci fonctionne seule, indique les fréquences 104 Hz, 208 Hz, 416 Hz, 624 Hz et 832 Hz. L'analyse du champ magnétique mesuré à proximité indique les mêmes fréquences et le niveau est maximum à 104 Hz (d'environ 3140 nT). Néanmoins, le niveau à cette même fréquence est réduit à moins de 2 nT au niveau des pieds du passager et n'est même plus détectable à hauteur de la tête. La distance est la principale cause de la décroissance du champ mais n'oublions pas la présence de pièces en acier entre le passager et cette source : éléments qui ont un effet atténuateur (blindage électromagnétique [SCHMERBER 06]).
- La pompe du circuit de frein produit une signature magnétique seulement aux fréquences de 82 Hz et 164 Hz. Le niveau mesuré à 82 Hz est d'environ 16 nT et reste relativement identique au niveau des pieds du passager avant. Ceci s'explique d'une part par la proximité de la source à cette zone de mesure et par la direction principale du champ magnétique généré d'autre part. En effet, le champ étant essentiellement perpendiculaire à la plaque d'acier séparant l'habitacle du compartiment moteur, cette dernière ne peut ainsi pas s'aimanter et modifier la répartition du champ magnétique dans l'habitacle : elle ne blinde pas. Cependant la décroissance du champ avec la distance, fait que le niveau est tout de même divisé par 4 à hauteur de la tête.
- La pompe de direction hydraulique est quant à elle source d'un spectre bien plus complexe. L'étude du courant électrique au niveau de son câble d'alimentation montre beaucoup de composantes fréquentielles : première raie à 48 Hz puis tous les multiples

jusqu'à l'harmonique 20 (960 Hz). La mesure à proximité avec l'analyseur de champ est relativement l'image de celle du courant. Cet outil indique les amplitudes maximales et on remarque environ 1  $\mu\text{T}$  à 960 Hz. Toutefois, la mesure à hauteur de la tête du passager avant fait apparaître, encore une fois, la réduction de ces niveaux par éloignement avec seulement 7 nT à 960 Hz.

### *Autres sources de variation du champ*

D'autres éléments plus intermittents ont également pu être observés. Par exemple la fréquence de balayage des essuies glace a pu être identifiée. Il y a certes le mouvement de la pièce ferromagnétique maintenant le balai en caoutchouc mais rappelons que là encore un moteur électrique est à l'origine du mouvement. Ainsi on observe également le champ magnétique généré par l'appel de courant électrique lorsque le moteur entraîne ces derniers. On remarque par ailleurs que lorsque la fréquence de balayage est maximale, le moteur fonctionne en continu et le courant électrique varie moins. En conséquence, la variation du champ magnétique diminue également.

Pour terminer, le fonctionnement des feux clignotants est également source de champ. En effet, le courant électrique est prélevé à la fréquence de clignotement, ce qui se traduit également en magnétique. On note cependant que pour des véhicules récents, faisant intervenir la technologie « LED », cette signature magnétique se trouve être fortement réduite.

Toute cette démarche est longue et fastidieuse mais elle est riche en informations. Elle permet la caractérisation de l'influence des équipements embarqués alimentés par le réseau de bord. Ce sera autant d'information utile lors des essais sur route afin de pouvoir mettre en évidence le fonctionnement d'autres éléments (électronique de puissance, moteur de traction, courant électrique de puissance, etc.).

## **I.2.2. Véhicule en mouvement et équipements éteints**

Jusqu'à présent, les mesures se sont déroulées avec le véhicule en position fixe afin de pouvoir s'affranchir de l'influence de l'environnement. Nous nous sommes concentrés sur les variations du champ et nous avons certes déjà noté l'influence du réseau EDF à 50 Hz mais remarquons que ces variations se mesurent autour d'une valeur moyenne. Cette valeur moyenne à l'intérieur de l'habitacle est probablement due à l'influence des aimantations permanentes des pièces en aciers composant le véhicule. Mais pas seulement, la mesure de l'environnement dans une zone suffisamment dégagée et sans le véhicule indique également une valeur moyenne relativement stable et uniforme : il s'agit du champ magnétique terrestre. On comprend bien l'importance d'étudier l'influence de ce dernier sur le niveau moyen mesuré à l'intérieur de l'habitacle.

Cette partie des essais permet donc la quantification de l'influence du champ terrestre. Elle permet également la mise en évidence de l'effet des roues sur le champ local et l'identification des perturbations le long d'un parcours.



Ce parcours est sur route fermée afin de limiter les perturbations aléatoires (passage d'autres véhicules par exemple). L'identification des perturbations est également faite lorsque le véhicule est en mode de fonctionnement complet (paragraphe suivant) mais en régime stabilisé et allure réduite. Cette étape a permis de mettre en évidence la présence de plaques en acier (bouche d'égout) et de lignes électriques souterraines.

Dans le cadre de ce rapport, nous nous concentrons sur le champ terrestre et l'influence des roues.

### *Influence du champ magnétique terrestre (véhicule n°=1)*

Ces essais sont réalisés dans une zone suffisamment grande et dégagée pour limiter les perturbations extérieures.

L'intensité et l'orientation du champ magnétique terrestre dans la zone est d'abord mesurée. Comme déjà dit plus tôt, celui-ci peut être considéré uniforme et constant sur toute la zone des essais. La mesure indique une composante verticale (du haut vers le bas) d'environ 40  $\mu\text{T}$  et une composante longitudinale (dans le plan horizontal local, du Sud vers le Nord magnétique) d'environ 26  $\mu\text{T}$ .

Le véhicule éteint est ensuite placé dans ce champ magnétique selon les quatre directions cardinales et on mesure à chaque fois les composantes du champ magnétique à l'intérieur de l'habitacle. La composante longitudinale (notée  $B_L$ ) est selon la longueur du véhicule, la composante transverse (notée  $B_T$ ) est selon la largeur du véhicule et la composante verticale (notée  $B_V$ ) est selon la hauteur du véhicule. L'équation (I.1) formalise mathématiquement la mesure effectuée au cours de ces essais.

Afin de s'affranchir des éventuelles composantes permanentes du champ magnétique à l'intérieur de l'habitacle, on fait la différence entre les mesures réalisées en cap opposé. C'est-à-dire cap Nord ( $B_L=26 \mu\text{T}$  et  $B_T=0 \mu\text{T}$ ) et cap Sud ( $B_L=-26 \mu\text{T}$  et  $B_T=0 \mu\text{T}$ ) d'une part et cap Est ( $B_L=0 \mu\text{T}$  et  $B_T=-26 \mu\text{T}$ ) et cap Ouest ( $B_L=0 \mu\text{T}$  et  $B_T=26 \mu\text{T}$ ) d'autre part. Cette démarche permet alors le calcul des coefficients de blindage «  $CB_L$  » et «  $CB_T$  ».

Cependant, notons que ces essais ne font varier que les composantes longitudinale et transverse du champ appliqué. La composante verticale ne variant pas, il nous est impossible de s'affranchir de la valeur moyenne et nous ne pourrions pas conclure pour cette composante du champ à l'intérieur de l'habitacle.

$$\begin{bmatrix} B_L \\ B_T \\ B_V \end{bmatrix}_{mesure} = \begin{bmatrix} B_L \\ B_T \\ B_V \end{bmatrix}_{permanent} + \begin{bmatrix} CB_L & - & - \\ - & CB_T & - \\ - & - & CB_V \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_L \\ B_T \\ B_V \end{bmatrix}_{terrestre} \quad (\text{I.1})$$

Le Tableau ci-dessous présente les coefficients de blindage des composantes longitudinale et transverse du champ pour le véhicule n°= 1.

Coefficients de blindage	Tête	Assise	Pack batterie
<b>Composante longitudinale</b>	<b>0,922</b>	<b>0,907</b>	<b>0,898</b>
<b>Composante transverse</b>	<b>0,798</b>	<b>0,771</b>	<b>0,790</b>
<i>Composante verticale</i>	<i>0,208</i>	<i>0,493</i>	<i>0,422</i>

Tableau I.4 : Coefficients de blindage des composantes du champ magnétique dans l'habitacle pour le véhicule n°=1

**Remarque :** Notons que pour la composante verticale, nous avons fait le simple rapport entre la mesure et la valeur du champ appliqué. On constate en effet la différence de résultat due au terme permanent «  $B_V$  » et nous ne pouvons pas conclure sur le blindage de cette composante.

De manière générale sur tous les véhicules mesurés, la composante longitudinale est moins réduite que la composante transverse : c'est l'effet de forme des véhicules, plus long que large. Cet effet de blindage se trouve être quelques fois plus important à proximité du pack batterie : ceci probablement à cause de renforts soit pour le soutien de la masse soit pour la protection des cellules en cas de choc.

On notera enfin que les véhicules faisant intervenir plus de matériaux plastiques pour la carrosserie (n°= 3 ou n°= 4 par exemple) présentent un effet de blindage largement réduit. Pour preuve, le Tableau ci-dessous présente les résultats obtenus avec le véhicule n°= 3.

Coefficients de blindage	Tête	Assise	Pack batterie
<b>Composante longitudinale</b>	<b>1,022</b>	<b>0,978</b>	<b>1,012</b>
<b>Composante transverse</b>	<b>0,982</b>	<b>0,916</b>	<b>0,929</b>
<i>Composante verticale</i>	<i>0,363</i>	<i>0,404</i>	<i>0,194</i>

Tableau I.5 : Coefficients de blindage des composantes du champ magnétique dans l'habitacle pour le véhicule n°=3

Le même type de calcul des coefficients de blindage a été réalisé pour le véhicule en mouvement. C'est-à-dire que la mesure à l'intérieur de l'habitacle est faite alors que le véhicule éteint est déplacé (poussé) selon une trajectoire circulaire. Après reconstruction du cap (c'est-à-dire orientation par rapport au Nord), on compare les variations mesurées à l'intérieur avec les variations appliquées à l'extérieur. Cet essai conduit aux mêmes coefficients de blindage du champ que ceux présentés précédemment.



### Effet des roues

Ces essais avec le véhicule en mouvement (poussé) mais éteint ont également mis en évidence l'influence des roues sur le champ magnétique mesuré à l'intérieur de l'habitacle. Cela peut s'expliquer par la composition d'une roue : il y a d'une part la jante, le plus souvent faite en acier et le pneu d'autre part qui intègre des tresses en acier (Figure I.7 ci-dessous) pour le maintien de la bande de roulement.

Concernant la jante, le procédé de fabrication a probablement engendré des aimantations locales alors source de champ magnétique. Lorsque le véhicule sera en mouvement, ces aimantations créeront donc un champ magnétique variable. Il y a de plus un autre effet bien connu (illustré par les freins magnétiques présent sur les bus, les camions ou encore les trains), lorsqu'une pièce en acier conducteur est en mouvement dans un champ magnétique, des courants de Foucault se développent et génèrent à leur tour un champ magnétique.

Concernant le pneu, les tresses en acier subissent localement une contrainte mécanique variable assez forte lorsque le véhicule se déplace ce qui est également source de champ magnétique (effet magnéto-élastique). De plus, celles-ci forment probablement un circuit électrique en court-circuit, en mouvement dans un champ magnétique, donc source de champ magnétique variable.

En définitive, tout est réuni pour qu'un champ magnétique variable et périodique, proportionnel à la vitesse du véhicule puisse être observé [MILHAM 99], [STANKOWSKI 00].

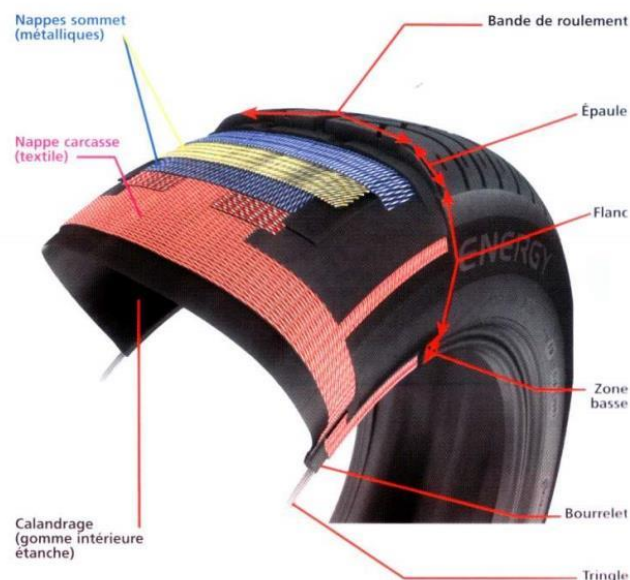
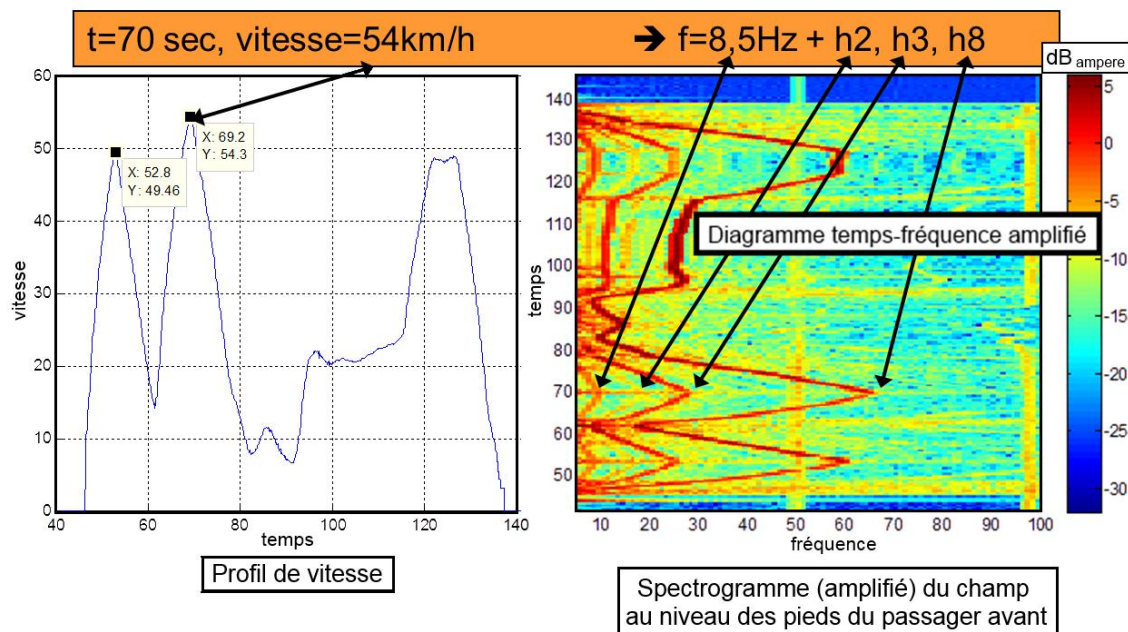


Figure I.7 : Illustration de la composition d'un pneu moderne

Afin de bien mettre en évidence l'influence des roues, nous présentons (Figure I.8) le spectrogramme (amplifié d'un facteur 4) du champ au niveau des pieds obtenu au cours d'un essai avec le véhicule en mode de fonctionnement normal. Composé de plusieurs accélérations et décélérations en ligne droite, on observe clairement la corrélation entre la vitesse de déplacement et les fréquences du champ magnétique.



**Figure I.8 : Mise en évidence du lien existant entre la vitesse du véhicule et la signature fréquentielle mesurée au niveau des pieds du passager avant**

Cette partie des essais permet l'évaluation de l'influence du champ magnétique terrestre et les résultats illustrent la réaction d'induit des pièces en acier composant le véhicule sur la mesure de ce dernier à l'intérieur de l'habitacle. La vitesse du véhicule a également été retrouvée par l'intermédiaire de la signature magnétique des roues et enfin les principales sources de perturbations ont été identifiées le long du parcours pour les essais suivants lorsque le véhicule est en mode de fonctionnement complet. Ces sources de perturbations ont par ailleurs été de nouveau recherchées au cours de cette dernière partie des essais lorsque le véhicule circule à vitesse stabilisée.

### 1.2.3. Véhicule en mouvement et fonctionnement complet

Grâce à tous les travaux réalisés jusqu'à présent, nous sommes capables d'identifier l'influence de chacun des éléments embarqués lorsque le véhicule fonctionne en mode de marche normale. Ainsi, par identification et élimination, cette dernière partie permet de mettre en évidence les éventuelles dernières sources de champ.

#### *Influence des boucles de courant de puissance*

Le pack batterie représente en général un volume assez important sous le véhicule. Celui-ci est relié au convertisseur de puissance, placé au plus près du moteur de traction, par une paire de câbles de puissance en courant continu.

Ces éléments supportent de fortes valeurs de courant électrique (jusqu'à plusieurs centaines d'Ampères) et sont alors naturellement sources de champ magnétique. Cependant, leur mise en œuvre influence grandement les amplitudes alors générées selon la dimension des boucles de courant équivalentes.

Les mesures montrent que sur tous les véhicules, les plus importantes variations de champ magnétique s'obtiennent en très basse fréquence (quelques hertz) et sont dues à la puissance instantanée du circuit de puissance en courant continu. Celles-ci se rencontrent toujours à proximité des câbles de puissance ou au-dessus des packs batteries.

Par exemple, pour le véhicule n°= 4, cette variation atteint jusqu'à 1  $\mu\text{T}$  par Ampère au-dessus du pack batterie. On notera par ailleurs que le pack batterie de ce véhicule est placé directement sous l'habitacle.

Pour le véhicule n°= 1, la Figure I.9 présente la variation du champ mesuré selon l'axe vertical au-dessus du pack batterie. Le courant continu de puissance de ce véhicule peut varier de « -100 A » (récupération de l'énergie en décélération) jusqu'à « +200 A » (pic de puissance à l'accélération).

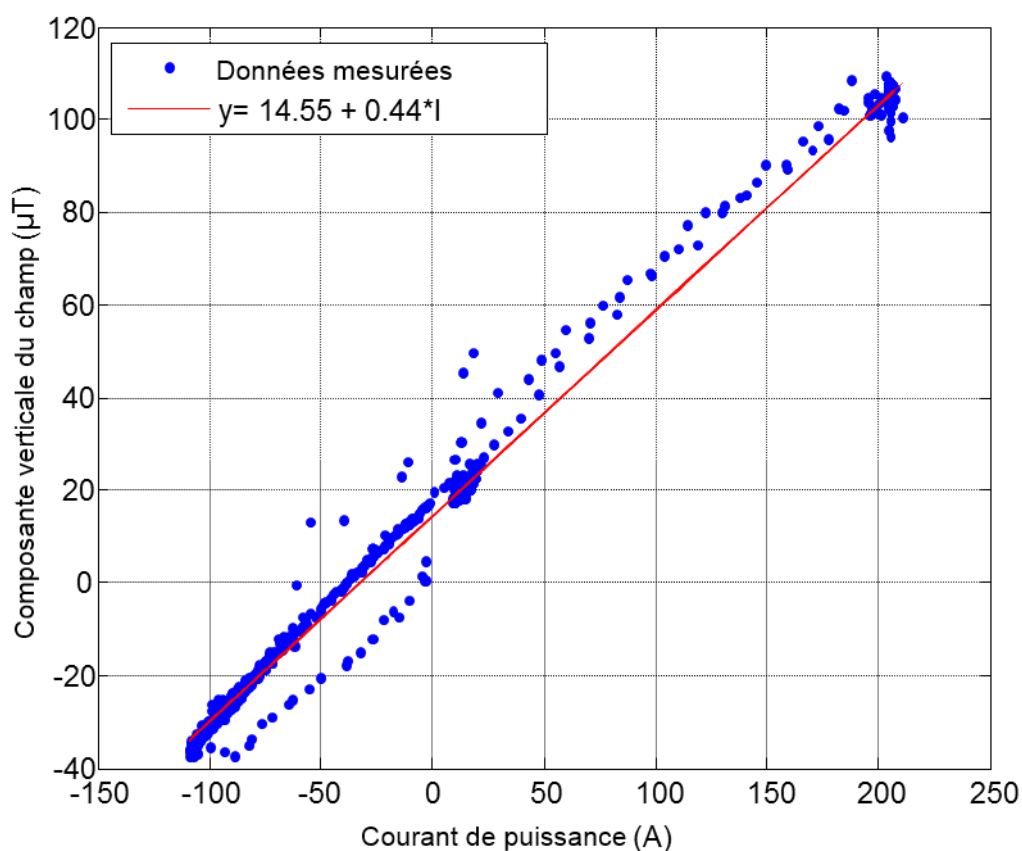


Figure I.9 : Variation de la composante verticale du champ magnétique au-dessus du pack batterie en fonction du courant électrique pour le véhicule n°=1

Malgré la présence de pièces en acier, on note une variation linéaire d'environ 440 nT par Ampère pour la composante verticale du champ. Cette composante représente par ailleurs la majorité du signal (pour ce point de mesure au-dessus du pack batterie) puisque la variation n'est que de 86 nT par Ampère pour la composante longitudinale (selon la longueur du véhicule) et 4 nT par Ampère pour la composante transverse (selon la largeur du véhicule).

### L'électronique de puissance

Dans la majorité des véhicules électriques modernes, cet équipement converti le courant continu de puissance en courant alternatif pour le moteur de traction. La fréquence de commutation des interrupteurs de puissance (de technologie MOSFET ou IGBT) est classiquement de l'ordre de 10 kHz.

L'utilisation de l'analyseur de champ (Narda EHP 50D) est toute indiquée pour tenter de mesurer le champ magnétique rayonné par ce type d'équipement. Cette mesure n'a été réalisée que pour les véhicules n°= 1 à n°= 4 sur lesquels on relève effectivement une composante spectrale magnétique entre 7 kHz et 9 kHz dont l'amplitude ne dépasse pas 20 nT (environ 9 nT sur la Figure ci-dessous pour le véhicule n°= 3).

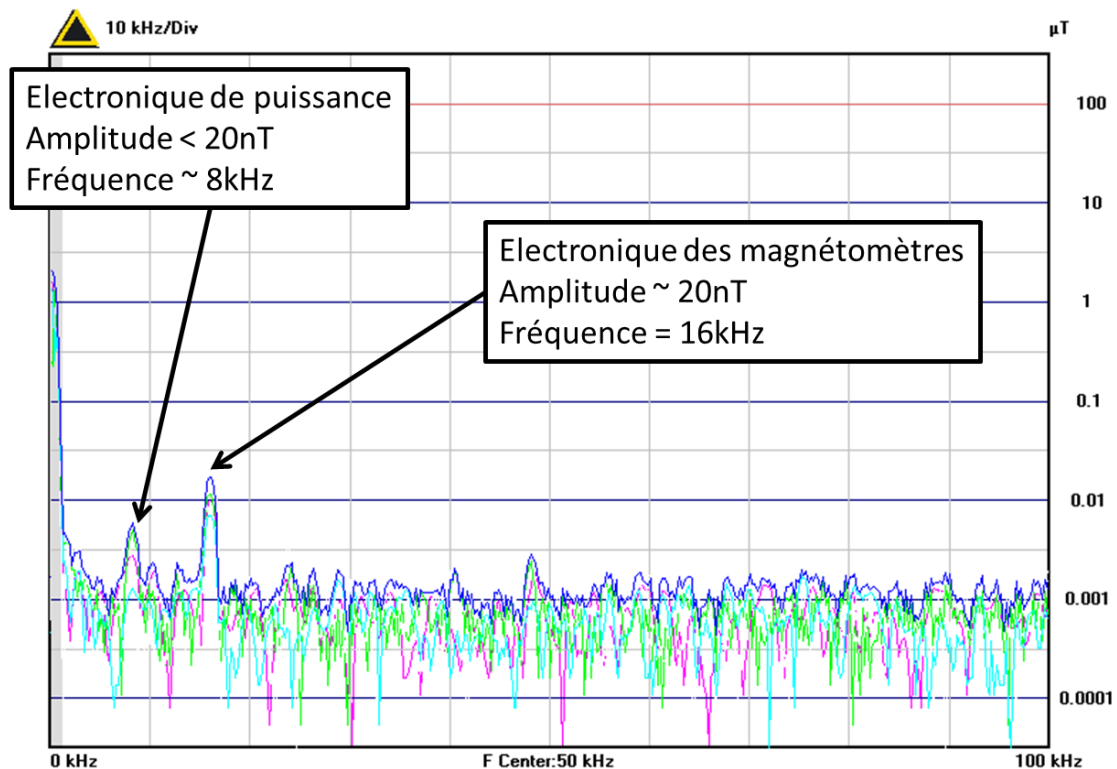


Figure I.10 : Mise en évidence du fonctionnement de l'électronique de puissance.  
Visualisation du fonctionnement des magnétomètres

On observe d'autre part les magnétomètres dont l'électronique fonctionne à 16 kHz (un essai spécifique sans ces derniers confirme cette influence). En définitive, sur la bande des fréquences comprises entre 3 kHz et 200 kHz, le niveau de champ mesuré n'excède pas 20 nT.

### Le moteur de traction

Nous terminerons par l'analyse du système de traction. Le moteur électrique, qu'il soit monophasé ou triphasé, de type courant continu, synchrone ou asynchrone, est construit de façon à optimiser son rendement et ainsi le circuit magnétique canalise la grande majorité du flux. Comme l'ont montré d'autres travaux [SCHMERBER 06], ces derniers ne génèrent que très peu de champ magnétique sauf éventuellement en cas de défaut. Cependant, cela ne reste mesurable qu'en champ proche car le champ généré en cas de défaut diminue rapidement

avec la distance. En définitive, il est impossible de détecter quoi que soit provenant de cet équipement électrotechnique à l'intérieur de l'habitacle du véhicule. Par ailleurs, le véhicule n°= 2 est hybride et le fonctionnement du moteur à combustion a pu être détecté. La signature mesurée est en dessous de 200 Hz pour un niveau maximum de 150 nT.

Afin de conclure, le Tableau I.6 résume les principaux résultats des analyses menées au cours de ces essais. On présente ici les principales amplitudes et fréquences du champ que nous avons mesuré à l'intérieur de l'habitacle. Ces résultats sont par ailleurs placés sur la Figure I.12.

	<b>Amplitudes du champ</b>	<b>Bande fréquence des variations</b>	<b>Véhicules impliqués</b>
<b>Courant de puissance</b>	De 100 $\mu$ T à 300 $\mu$ T	De 0Hz à 1 Hz	Tous
<b>Roues</b>	De 0,1 $\mu$ T à 2 $\mu$ T	De 0 à 20 Hz	Tous
<b>Moteur à combustion</b>	De 50nT à 150 nT	De 0 Hz à 200 Hz	N°=2
<b>Pompe de direction hydraulique</b>	1 $\mu$ T	De 500 Hz à 1 kHz	N°=1
<b>Electronique de puissance</b>	20nT	Entre 7 kHz et 9 kHz	N°=1 à N°=4

Tableau I.6 : Résumé des principales sources identifiées

Il est intéressant de noter le caractère « magique » de la mesure de champ magnétique. En effet, comme avait pu le remarquer Alexis LE GOFF lors de sa thèse [LE GOFF 11], celle-ci est très riche d'information car elle permet l'identification du fonctionnement de tel ou tel équipement embarqué. On imagine aisément qu'avec un peu de méthode et d'analyse, cette mesure du champ magnétique pourrait être à la base d'un outil de diagnostic.

Les principales observations réalisées au cours de ces mesures ont été listées ci-dessus. Rappelons que ces résultats sont obtenus dans le cadre du projet Européen « EMSafety » et sont par conséquent mis en comparaison avec les recommandations internationales existantes en la matière.

## I.3. Calcul de l'exposition au champ magnétique

### I.3.1. Définitions

L'ICNIRP<sup>2</sup> (International Commission for Non Ionizing Radiation Protection) donne une série de recommandations en matière de niveau de champ électrique et magnétique afin de limiter l'exposition des personnes. L'objectif de cette commission est sanitaire puisque les expositions limites définies dérivent des effets physiologiques perçus (échauffement des tissus) en présence d'un champ.

Les documents [ICNIRP 09] et [ICNIRP 10] définissent respectivement les niveaux en statique et pour chaque fréquence entre 1 Hz et 10 MHz. Ces recommandations sont internationales et devrait (à priori) servir de point de référence pour la définition des normes en vigueur dans chaque pays.

Le caractère général de ces recommandations s'avère fort utile dans le cadre de ces mesures et nous ne nous intéressons uniquement aux niveaux de champ magnétique.

#### Gabarit des recommandations

Pour un signal purement sinusoïdal, l'amplitude maximale du champ magnétique à la fréquence est donc définie de sorte que l'échauffement des tissus humains, induit par des densités de courant surfacique, ne dépasse pas un certain seuil (2 mA/m<sup>2</sup> pour le public et 10 mA/m<sup>2</sup> pour les travailleurs). La Figure ci-dessous illustre le gabarit général de ces amplitudes maximales que l'on notera «  $A_R(f)$  » pour la suite de ce paragraphe.

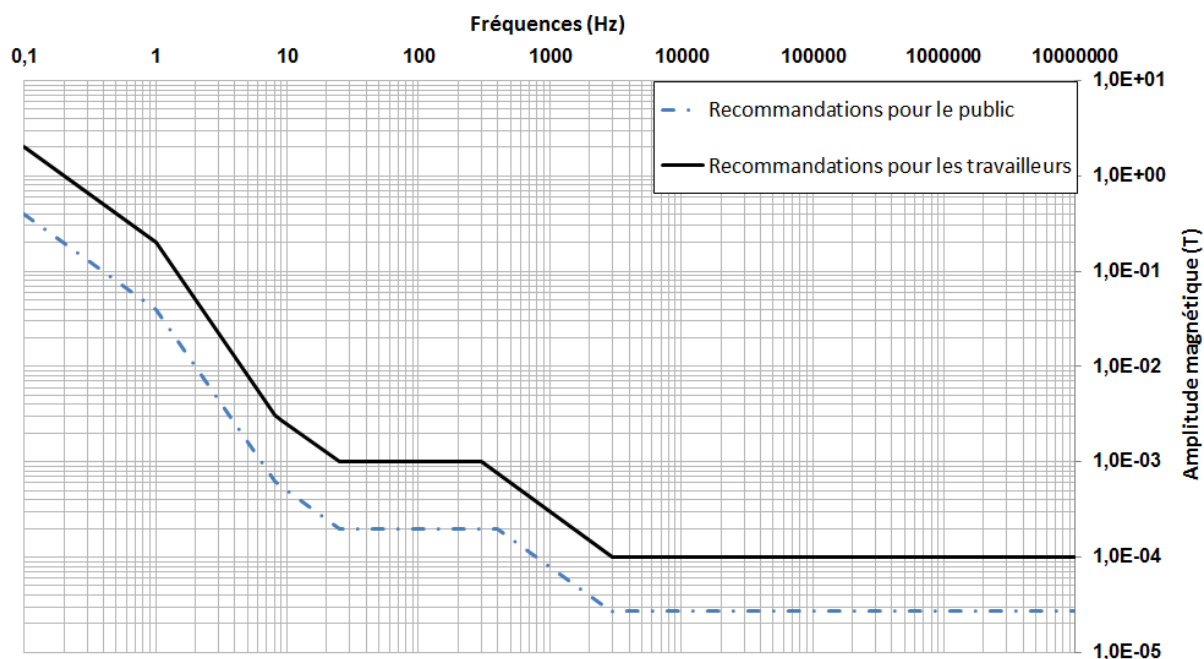


Figure I.11 : Gabarit des recommandations pour le champ magnétique

<sup>2</sup> <http://www.icnirp.de/>



### Critère d'exposition n°1 : $C_1$

De manière naturelle, l'ICNIRP définit un premier critère (équation (I.2)) à partir du gabarit présenté plus tôt. Ce critère est la somme des ratios entre le niveau mesuré ( $A(f_j)$ ) et le niveau maximum recommandé ( $A_R(f_j)$ ). Ces ratios sont calculés pour chaque fréquence présente et leur somme doit rester inférieure à 100 %.

$$C_1 = \sum_{j=1\text{Hz}}^{j=10\text{MHz}} \frac{A(f_j)}{A_R(f_j)} \leq 1 \quad (\text{I.2})$$

Cependant comme le pointe la commission elle-même [ICNIRP 10], ce critère reste valable tant que le nombre de composantes spectrales est faible et que celles-ci s'ajoutent en phase.

En effet lorsque le spectre contient beaucoup de composantes spectrales dont les fréquences maximales et minimales sont très éloignées mais liées (fréquence fondamentale et harmoniques), l'hypothèse formulée sur les phases n'est plus valide et ce critère conduit à une valeur d'exposition plus importante qu'elle ne l'est en réalité.

### Critère d'exposition n°2 : $C_2$

Un second critère d'exposition a été alors développé par cette commission suite aux travaux réalisés par [JOKELA 00] sur la base de deux idées.

La première idée provient de l'analyse énergétique des signaux que l'on peut formuler comme suit : « A basse fréquence, les cellules doivent être préservées du développement de fort courant induit alors qu'à haute fréquence, celles-ci peuvent accepter de plus forte valeur mais sur un temps très court ».

La seconde idée tente de ramener toutes les composantes spectrales du signal en une unique fréquence afin de pouvoir appliquer un critère du même type que précédemment.

La réalisation de ce critère passe par le calcul d'une fonction de pondération (équation (I.3)) définie comme suit :

- Choix arbitraire d'une fréquence de référence ( $f_{\text{ref}}$ ) qui implique le choix de l'amplitude de référence ( $A_R(f_{\text{ref}})$ ) relevée sur le gabarit défini plus tôt.
- Cette amplitude de référence pondère alors l'inverse du gabarit pour former la fonction  $WF(f_{\text{ref}}, f)$ .

$$WF(f_{\text{ref}}, f) = \frac{A_R(f_{\text{ref}})}{A_R(f)} \quad (\text{I.3})$$

La phase «  $\varphi$  » de cette fonction dépend de l'évolution du gabarit en fonction de la fréquence : «  $\varphi = 0$  » lorsque qu'elle l'évolution est constante, «  $\varphi = +\pi/2$  » lorsqu'elle est proportionnelle à «  $1/f$  », «  $\varphi = +\pi$  » lorsqu'elle est proportionnelle à «  $1/f^2$  », etc.

Sous l'hypothèse que le signal mesuré soit périodique sur une plage de temps  $[t_1 ; t_2]$ , il est possible de calculer sa décomposition en série de Fourier (I.4).

$$B(t) = \sum_{j=1}^n A(f_j) \cdot \cos(2\pi f_j t + \theta_j) \quad (\text{I.4})$$

Le calcul du signal pondéré (I.5) est alors simplement comparé (équation (I.6)) au niveau de référence ( $A_R(f_{ref})$ ) correspondant au choix de la fréquence de référence. En divisant chaque terme par ce niveau de référence, on obtient la définition du second critère d'exposition dépendant du temps (I.9). Comme pour le premier critère, ce dernier doit également rester inférieur à 100 %.

$$S_{WF(f_{ref},f)}(t) = \sum_{j=1Hz}^{10MHz} WF(f_{ref}, f_j) \cdot A(f_j) \cdot \cos(2\pi f_j t + \theta_j + \varphi_j) \quad (\text{I.5})$$

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad S_{WF(f_{ref},f)}(t) < A_R(f_{ref}) \quad (\text{I.6})$$

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad C_2(t) = \left| \sum_{j=1Hz}^{10MHz} \frac{A(f_j)}{A_R(f_j)} \cdot \cos(2\pi f_j t + \theta_j + \varphi_j) \right| \leq 1 \quad (\text{I.7})$$

### I.3.2. Placement des niveaux mesurés sur le gabarit

La Figure ci-dessous place les principaux résultats des analyses menées au cours des essais (cf. Tableau I.6) sur le gabarit des recommandations défini par l'ICNIRP et on constate que tous les niveaux maximum relevés restent en moyenne deux décades en dessous de ces recommandations.

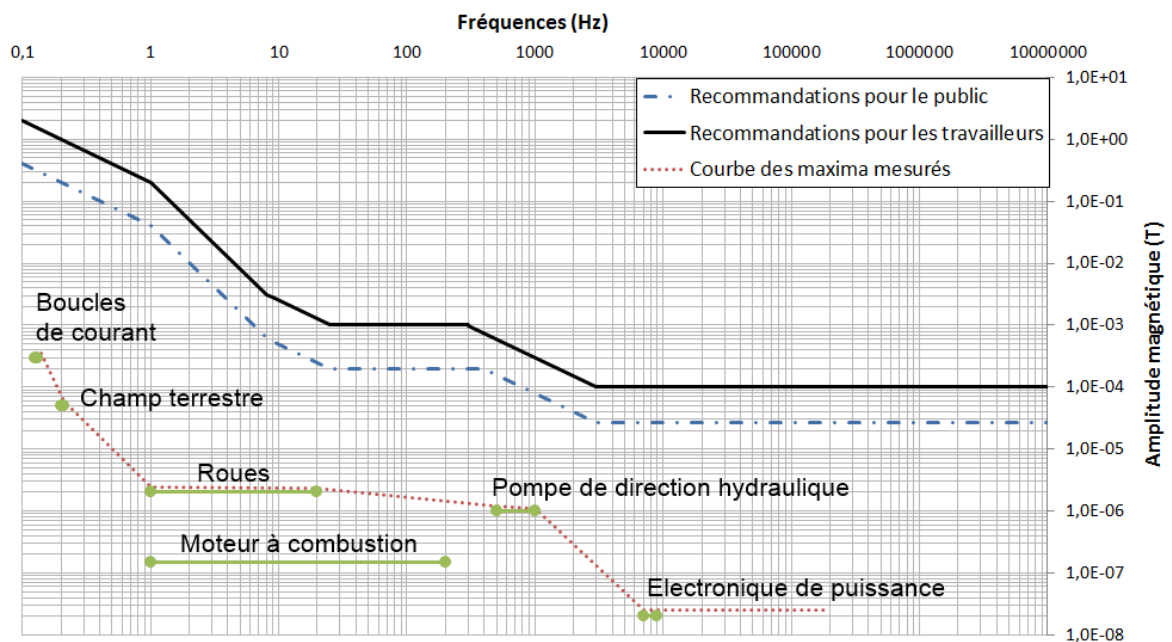


Figure I.12 : Principaux résultats des analyses des mesures comparés au gabarit des recommandations



Bien évidemment, tous ces niveaux ne se mesurent pas sur tous les véhicules. Par exemple, la pompe de direction hydraulique est un élément singulier du véhicule électrique n°=1 dont la conception date du début 1990. Les véhicules récents sont équipés d'une direction à assistance électrique qui ne génère aucun champ magnétique dans l'habitacle.

Par contre l'influence des boucles de courant de puissance (pack batterie et câbles associés) se mesure sur tous les véhicules. Le niveau de champ alors généré reste certes en dessous des recommandations mais on notera que l'évolution du véhicule électrique semble aller de pair avec le développement des systèmes de transfert d'énergie sans contact : soit pour la recharge des batteries [LAOUAMER 98], [MISKIEWICZ 11] soit pour l'alimentation électrique en cours de déplacement (pour ne citer qu'un exemple : en Asie avec OLEV Technologies<sup>3</sup>) [AHN 11], [SHIN 12], [STAMATI 13], [BAVASTRO 14].

Ce sont également des boucles de courant de puissance qui peuvent être placées sous l'habitacle mais celles-ci fonctionnent à plus haute fréquence. Prenons ainsi les mêmes amplitudes autour de 10 kHz par exemple : on aperçoit clairement le dépassement potentiel de la recommandation.

Cette analyse permet de mettre en avant l'importance des boucles de courant de puissance sur le niveau de champ magnétique mesurable dans l'habitacle des véhicules électrique.

Cependant, lorsque le véhicule est en mode de marche normale, le champ magnétique que l'on mesure à l'intérieur de l'habitacle est la somme de toutes les contributions présentées. En conséquence, ce champ est composé d'une multitude de composantes fréquentielles et le calcul du second critère d'exposition semble nécessaire afin que l'analyse soit plus complète.

### **I.3.3. Calcul du critère n°2 et résultats**

Dans le cadre du projet Européen, la mise en œuvre du premier critère ( $C_1$ ) confirme la remarque de l'ICNIRP : lorsque le nombre de composantes spectrales est important, le résultat obtenu surestime l'exposition. Des valeurs de l'ordre de 600 % ont été calculées et c'est pourquoi nous nous sommes attachés au calcul du second critère.

L'analyseur de champ (Narda EHP-50D) ne donnant pas accès à l'enregistrement temporel des signaux, seuls les mesures des magnétomètres ne sont utilisables pour ce calcul. Toutefois, l'analyse effectuée avec cet appareil montre que les composantes spectrales au-delà de 1 kHz diminuent très fortement (niveau maximum inférieur à 50 nT). Ainsi la somme des contributions pondérées des composantes spectrales entre 1 Hz et 2 kHz (bande passante des magnétomètres) devrait être valide.

---

<sup>3</sup> <http://olevtech.com/>

### *Mise en œuvre pratique du critère n°=2*

La commission donne assez peu de détails sur la mise en œuvre de ce critère concernant les éléments suivants :

- Le choix de la plage de temps  $[t_1 ; t_2]$ .
- Le calcul des composantes spectrales.
- La prise en compte de signaux multidimensionnels.

Pour le premier élément, plusieurs largeurs de plage de temps  $[t_1 ; t_2]$  ont été mises en œuvre afin de vérifier la stabilité des résultats.

Pour le second élément, le signal traité étant échantillonné, ce fenêtrage temporel fait souvent apparaître des artefacts fréquentiels sur les bords du spectre car le signal n'est plus périodique. Pour s'en affranchir, il a été choisi d'étudier le critère d'exposition résultant pour tout instant «  $t_k$  » appartenant à une plage de temps plus courte de « X % » que celle utilisée pour le calcul.

$$t_k \in \left[ t_1 + X \cdot \frac{(t_2 - t_1)}{100} ; t_2 - X \cdot \frac{(t_2 - t_1)}{100} \right] \quad (\text{I.8})$$

Pour le troisième élément, les signaux que l'on mesure sont tridimensionnels. Nous avons fait le choix de calculer un critère d'exposition «  $C_{2,i}$  » pour chacune des composantes «  $i$  » puis de les rassembler par le calcul de la norme Euclidienne (I.9) à chaque instant «  $t_k$  ».

$$C_2(t_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (c_{2,i}(t_k))^2} \quad (\text{I.9})$$

Nous ne regardons enfin que la valeur maximale du critère temporel ainsi obtenu.

$$\forall t_k \in [t_1 + q ; t_2 - q], \quad C_{MAX} = \max(C_2(t_k)) \quad (\text{I.10})$$

### *Résultats de calcul du critère n°=2*

De manière générale sur tous les véhicules mesurés, on relève les trois principales caractéristiques d'exposition suivantes :

- Un pic de la valeur d'exposition, compris en 14 % et 18 %, est obtenu à la mise en route du véhicule. Ce pic est dû à l'appel de courant lors du démarrage de tous les équipements en même temps.
- La plus haute valeur d'exposition s'obtient soit à proximité du pack batterie soit à proximité des câbles de puissance.
- L'exposition maximale obtenue à hauteur de la tête du passager avant ne dépasse pas 1,5 % de la recommandation.

Nous terminons par le Tableau ci-dessous qui résume les principales valeurs maximales d'exposition calculées selon le second critère.

Ces résultats sont obtenus pour chaque véhicule mesuré en circulation normale le long du parcours identifié et sans prendre en compte le pic d'exposition dû au démarrage de tous les équipements.

N° du véhicule	Type de véhicule	Exposition maximale	Zone d'occurrence
1	Tout électrique	14,3 %	Au niveau des pieds du passager avant
2	Hybride rechargeable	17,8 %	Au-dessus du pack batterie
3	Hybride	7,9 %	Au-dessus du pack batterie
4	Tout électrique	5,9 %	Au niveau des pieds du passager arrière
5	Tout électrique	4,0 %	Au niveau de l'assise du passager avant
6	Tout électrique	3,2 %	Au niveau de l'assise du passager avant
7	Tout électrique (pile à combustible)	2,1 %	Au niveau de l'assise du passager avant
8	Tout électrique	2,7 %	Au niveau des pieds du passager avant

Tableau I.7 : Résumé des expositions maximales calculées sur les 8 véhicules mesurés

## Conclusions intermédiaires

Il est rassurant de voir que les campagnes de mesure réalisées dans le cadre du projet Européen « EMSafety » montrent le respect des recommandations internationales en matière de niveau de champ magnétique dans l'habitacle des véhicules. Ce résultat semble néanmoins relativement naturel de la part des constructeurs automobiles avec la mise en place probable d'éléments de blindage : solution certainement coûteuse.

Toutefois, comme expliqué au début de ce chapitre, ces mesures sont le prétexte pour analyser un cas concret représentatif de notre problématique générale : l'identification et la modélisation du champ magnétique à l'intérieur d'une zone (l'habitacle d'un véhicule électrique) entourée par les sources (les équipements électrotechniques embarqués).

Dans ce contexte, on relève l'importance des éléments en acier (essentiellement le châssis et la carrosserie). Ceux-ci se situent nécessairement entre la zone d'étude à l'intérieur de l'habitacle et les sources. Nous avons mis en évidence avec le champ magnétique terrestre que ces derniers ont la capacité de modifier la répartition du champ source à l'intérieur de l'habitacle. Des travaux ont par ailleurs déjà montré l'influence de tels éléments sur la répartition locale du champ magnétique [LEGRIS 96], [CHADEBEC 01], [VUILLERMET 08]. Il semble donc important de mieux caractériser cet élément pour répondre à la question qui nous est adressée.

Parmi toutes les sources de champ embarquées, les boucles de courant de puissance continue sont à l'origine de la majorité des variations de champ magnétique à l'intérieur de l'habitacle. Ces variations sont très basse fréquence et peuvent représenter plusieurs fois la valeur du champ terrestre (environ 50  $\mu\text{T}$  sous nos latitudes). Même si les niveaux constatés restent bien inférieurs aux recommandations (400 mT à 0 Hz et 200 mT à 1 Hz), les caractéristiques de ce type de source méritent attention. En effet, l'évolution du véhicule électrique semble aller de pair avec le développement des systèmes de recharge sans contact [LAOUAMER 98], [MISKIEWICZ 11], [SHIN 12]. Ces derniers sont également composés de boucle de courant mais fonctionnant à plusieurs dizaines de kilohertz, plage de fréquence où les recommandations sont bien plus basses.

Le chapitre suivant présente alors la modélisation par problème direct des éléments en acier et des boucles de courant (pack batterie et câbles associés) afin de mettre en évidence leurs principaux paramètres d'influence et améliorer notre compréhension des phénomènes observés jusqu'à présent.



## Chapitre II :

### Modélisation magnétostatique en problème direct

---



## Introduction

Comme nous l'avons remarqué au premier chapitre, les boucles de courant de puissance sont à l'origine des plus fortes variations de champ dans l'habitacle malgré les pièces d'acier du véhicule qui ont la capacité de modifier la répartition du champ source. Nous souhaitons alors mettre en évidence les principaux paramètres influençant ces niveaux d'induction et proposer un modèle acceptable et relativement léger conforté par les mesures déjà présentées.

Dans ce chapitre, nous nous limitons à la description d'une démarche de modélisation qui améliore notre compréhension des phénomènes observés. Nous ne souhaitons en aucun cas développer un modèle très précis car la complexité des phénomènes est telle qu'aucune modélisation ne saurait prédire parfaitement le champ partout dans un véhicule ou au prix d'un effort d'analyse excessivement important.

La modélisation est comparée aux mesures et recalée en fonction de celles-ci. Nous verrons que cette démarche peut s'avérer laborieuse mais elle n'est pas vaine car son but final est d'apporter de l'information pertinente pour une démarche plus générale. Cette dernière vise l'identification par problème inverse du champ magnétique à l'intérieur d'une zone.

Dans un premier modèle, nous décrivons les principales pièces en acier du véhicule. Le champ inducteur est le champ terrestre et nous tentons de retrouver les coefficients de blindage associés à l'habitacle. Cette première modélisation permet d'obtenir les principales caractéristiques de la géométrie et des matériaux associés.

Un second modèle décrit les principales boucles de courant seules définissant le pack batterie et le câblage de puissance associé. Nous remarquons que l'induction magnétique générée reste du même ordre que le champ terrestre et peut alors être appliqué aux pièces ferromagnétiques définies dans le premier modèle.

Les problèmes ainsi décrits sont linéaires (domaine des champs faibles) et leur résolution est faite par une formulation intégrale magnétostatique du type « Méthode des Moments Magnétiques » [CHADEBEC 01], [CHADEBEC 06]. La méthode intégrale permet d'assurer un calcul du champ dans l'air précis tout en gardant un maillage des matériaux relativement léger.

Le chapitre se termine par une analyse du champ dans l'habitacle basée sur les modèles développés. Des propositions de règles simples de câblage sont proposées pour limiter le champ magnétique.



## II.1. Environnement de la modélisation

### II.1.1. Les différentes sources de champ

Grâce à la contribution de l'équipe du LIGE (Laboratoire d'Intégration de Générateurs Electriques) appartenant au CEA Liten<sup>4</sup>, nous avons pu disposer d'un véhicule électrique pour notre démarche de modélisation. Il s'agit d'un véhicule utilitaire de marque Citroën Saxo mise sur le marché dans les années 1990, voir ci-dessous.



Figure II.1 : Citroën Saxo électrique appartenant au CEA Liten/LIGE

#### *Champ terrestre et pièces en acier*

A partir des savoir-faire du laboratoire dans le domaine du magnétisme du navire, nous souhaitons modéliser les principales caractéristiques des pièces en acier composant soit le châssis soit la carrosserie du véhicule. En effet, celles-ci interagissent avec le champ source pour modifier sa répartition à l'intérieur de l'habitacle. Cet effet est dû à leur capacité à s'aimanter sous l'action d'un champ magnétique extérieur ce qui est la propriété des matériaux ferromagnétiques.

Ces pièces ferromagnétiques modifient la répartition du champ magnétique terrestre à l'intérieur de l'habitacle. Pour modéliser cet effet, il est classique de se situer dans le domaine des champs faibles où les lois de Raleigh s'appliquent [LEGRIS 96], [CHADEBEC 01], [VUILLERMET 08].

Ainsi, uniquement dans le cadre de petites variations, la loi d'aimantation peut être approximée par son terme linéaire (i.e. réversible) reliant l'aimantation  $\mathbf{M}$  du matériau au champ magnétique  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{M} = \chi \cdot \mathbf{H} \quad (\text{II.1})$$

Où  $\chi$  est une constante, appelée susceptibilité magnétique, dépendant du matériau et non du champ inducteur si celui-ci reste faible (devant le champ coercitif du matériau).

---

<sup>4</sup> <http://www-liten.cea.fr/index.htm>

Cette constante est par ailleurs reliée à la perméabilité relative (aussi appelée réversible dans ces conditions) par la relation suivante :

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (\text{II.2})$$

Nous tenterons donc de caractériser les principaux éléments ferromagnétiques (paramètres physiques et géométriques) du véhicule grâce à leur réaction mesurée lorsqu'ils sont soumis au champ magnétique terrestre.

En effet, la linéarité du problème et le caractère uniforme du champ source simplifient grandement l'identification de ces principaux éléments.

### *Boucles de courant*

Nous avons montré l'intérêt de modéliser la répartition des courants continus de puissance se développant dans le pack batterie et les câbles associés car ces derniers sont à l'origine de la majorité des variations de l'induction magnétique dans l'habitacle du véhicule.

La définition des principaux paramètres géométriques des boucles de courant alors créées provient de la connaissance de ces dernières grâce à la contribution de l'équipe du LIGE.

La zone d'étude de l'induction magnétique rayonnée étant suffisamment éloignée des conducteurs, ces derniers ne seront décrits que par une répartition de courants linéiques élémentaires.

Les résultats de simulation montreront que les niveaux d'induction magnétique créés par ces courants sont également dans le domaine des champs faibles, rendant ainsi possible la modélisation globale (pièces ferromagnétiques, champs terrestre et boucles de courant) par un seul problème magnétostatique linéaire.

## **II.1.2. Méthode numérique de modélisation**

Si nous n'avions que des boucles de courant à modéliser dans l'air, les lois de Biot et Savart permettraient le calcul analytique de l'induction magnétique en tout point. La présence d'éléments ferromagnétiques requiert alors l'utilisation d'une méthode numérique pour déterminer leur aimantation induite qui dépend des champs magnétiques extérieurs. Ce n'est qu'après cette étape que nous pourrions calculer le champ magnétique partout dans l'espace.

La première méthode candidate est celle des éléments finis. Cette méthode est probablement la plus répandue mais elle n'est pas adaptée à notre problème pour plusieurs raisons :

- Bien que ce ne soit plus un réel problème pour les outils informatiques actuels, le maillage porte sur tout le volume englobant l'objet d'étude (délimité par l'objet appelé « boîte infinie » définissant les conditions aux limites) et engendre des projets relativement lourds à gérer.

- Rappelons que notre objectif consiste à calculer la valeur du champ magnétique dans l'air. Or dans cette zone, celui-ci est faible et le résultat obtenu est très sensible au bruit numérique lié au maillage.

Les méthodes intégrales sont une alternative plus adaptée à notre problématique pour les raisons suivantes :

- Seul le maillage des parties ferromagnétiques est nécessaire. De plus, compte tenu des caractéristiques de ces éléments mis en jeu (tôles minces), le maillage n'est que surfacique et le retrait des éléments volumiques allège énormément le projet.
- L'inconvénient majeur de cette méthode qui réside dans l'interaction totale de tous les éléments maillés entre eux est pallié par les outils de compressions matricielles (Fast Multipole Method) [NGUYEN 11].
- Le calcul du champ magnétique dans l'air ne dépend plus d'un quelconque maillage dans cette région et le calcul du champ y est plus précis.

Nous avons la chance de disposer d'outils de calcul mettant en œuvre chacune de ces deux méthodes :

- le logiciel Flux®3D<sup>5</sup> commercialisé par la société CEDRAT, utilise la méthode des éléments finis pour tout type de problèmes électrotechniques.
- Le logiciel LOCAP<sup>6</sup>, initialement développé au laboratoire pour des applications marines, implémente des formulations intégrales magnétostatiques du type Méthode des Moments Magnétiques pour calculer l'aimantation des matériaux [CHADEBEC 01], [CHADEBEC 06], [VUILLERMET 08].

Nous avons mis en œuvre notre démarche de modélisation autour de ce second logiciel.

### II.1.3. Méthodologie de modélisation

La formulation choisie est simple et aujourd'hui largement maîtrisée car relevant de la magnétostatique linéaire. Toutefois, la complexité de la modélisation est réelle puisque la difficulté réside surtout dans la profusion des sources. Il faut donc les sélectionner (car les prendre toutes en compte est impossible) et les définir (choix des matériaux, géométries simplifiées ou non, etc.).

Nous avons procédé en deux étapes, en caractérisant les principaux éléments ferromagnétiques d'une part et les boucles de courant d'autre part.

---

<sup>5</sup> <http://www.cedrat.com/en/software/flux.html>

<sup>6</sup> [http://www.g2elab.grenoble-inp.fr/recherche/locapi-213397.kjsp?RH=G2EALB\\_R-MAGE-MODELI](http://www.g2elab.grenoble-inp.fr/recherche/locapi-213397.kjsp?RH=G2EALB_R-MAGE-MODELI)

Concernant les éléments ferromagnétiques, notre démarche consiste dans un premier temps à décrire les principales pièces constituant le châssis et la carrosserie. Le modèle est à valider véhicule éteint (pas de courant dans le circuit de puissance, aucun élément en fonctionnement à bord) dans le champ inducteur terrestre.

Nous entendons par validation, la comparaison à la mesure sur quelques capteurs de champs placés dans l'habitacle lorsque le véhicule est dans une orientation donnée par rapport au champ terrestre.

L'approche est itérative et consiste à corriger l'écart comme suit :

- Description des pièces ferromagnétiques et définition des paramètres physiques (épaisseur de la tôle, propriétés magnétique) puis maillage.
- Calcul de la répartition d'aimantation induite sous l'application d'un champ magnétique uniforme.
- Calcul de l'induction magnétique à l'intérieur de l'habitacle et comparaison avec les mesures effectuées sur le véhicule.
- Définition et ajout d'éléments ferromagnétiques qui pourraient corriger l'écart avec la mesure obtenue.

Concernant la description des boucles de courant, elle intervient dans un deuxième temps lorsque le modèle des pièces ferromagnétiques est stabilisé. La description géométrique de ces boucles est permise grâce aux observations du véhicule et aux informations (suffisamment exhaustives) que nous avons pu avoir par l'intermédiaire de l'équipe du CEA Liten/LIGE. Ces nouvelles sources sont ensuite introduites dans le modèle.

## II.2. Modélisations physiques

### II.2.1. Eléments ferromagnétiques

#### *Définition du modèle ferromagnétique de départ*

La modélisation débute par la description des principales caractéristiques géométriques extérieures du véhicule (Figure II.3). Pour cela, nous nous appuyons sur les principales dimensions (données en millimètres) reportées sur la Figure ci-dessous :

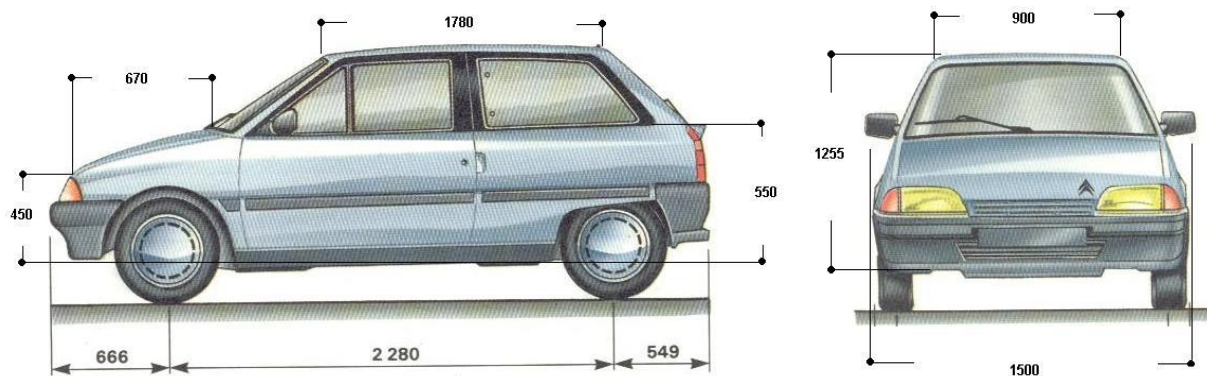


Figure II.2 : Principales dimensions extérieures du véhicule Citroën Saxo 3 portes des années 1990

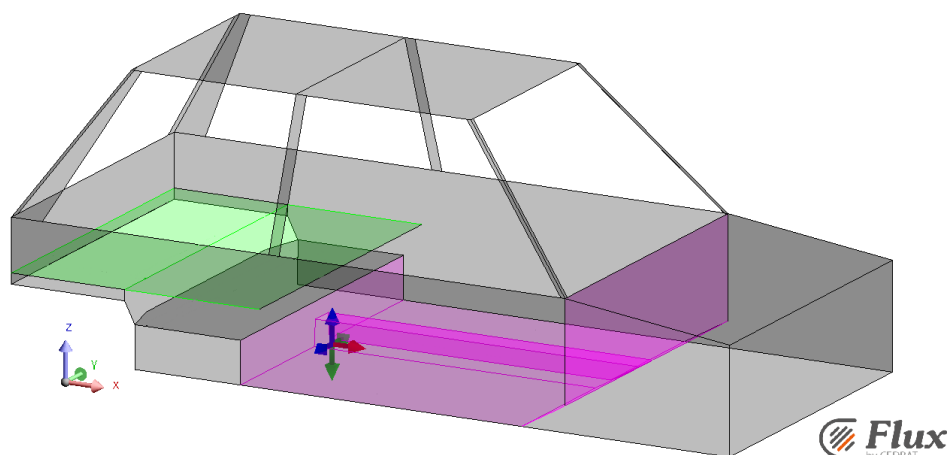


Figure II.3 : Modèle de base des éléments ferromagnétiques

Les points de calcul de l'induction magnétique dans l'air (comparables aux points de mesures réalisées dans le véhicule) étant suffisamment éloignés de ces pièces ferromagnétiques et en s'inspirant des travaux [BRUNOTE 91], nous avons fait le choix de décrire les principales pièces par de simples surfaces définies par une épaisseur moyenne. Les autres dimensions (longueur et largeur) étant relativement connues, l'évaluation de l'influence de ces pièces est alors faite à travers le choix de l'épaisseur moyenne et des propriétés magnétiques. L'épaisseur de chacune de ces surfaces sera détaillée dans la suite mais on peut d'ores et déjà estimer que toutes les épaisseurs moyennes mises en jeu ne dépasseront pas les quelques millimètres.

Le modèle de départ est alors constitué du châssis (surfaces magenta), des éléments de carrosserie (surfaces grises) et du plateau du coffre (surface verte).

Nous supposons que tout l'acier mis en œuvre sur ce véhicule (ou pour le moins, tout celui que nous modélisons) possède les mêmes propriétés magnétiques.

Ce travail se basant sur les savoir-faire du laboratoire dans le domaine du magnétisme du navire et sous l'hypothèse des champs faibles, la perméabilité magnétique à considérer est la perméabilité relative réversible ( $\mu_r$ ) de l'acier, classiquement donnée autour de 150 dans ces conditions. Après plusieurs simulations en ne faisant varier que ce paramètre (entre 50 et 300), on constate assez peu de modifications du champ résultant dans l'air car l'effet de forme du véhicule est dominant. En définitive, nous avons fait le choix de définir la perméabilité relative du matériau à  $\mu_r = 150$ .

L'observation en détail du véhicule permet de définir les épaisseurs des surfaces (représentant des tôles) que nous avons choisies pour décrire le véhicule. Les surfaces sont planes et l'épaisseur est déterminée afin de représenter le volume moyen équivalent des éléments décrits.

Le plateau du coffre (surface verte sur le modèle ci-dessus) est relativement simple à définir. Il est composé d'une tôle légèrement ondulée avec quelques renforts en dessous : cet élément est alors défini par une surface plane d'épaisseur 2 mm.

Le châssis est une pièce plus massive car elle assure en partie la rigidité et la solidité du véhicule. Celui-ci est alors probablement composé de plusieurs longerons creux entre lesquels s'intercale le plancher. On note également la présence du tunnel d'échappement entre le passager et le conducteur (vestige de la version thermique dont le châssis a servi pour la réalisation de ce véhicule électrique). En définitive, nous définissons les surfaces (magenta sur la Figure ci-dessus) avec une épaisseur de 3 mm.

Les éléments de carrosserie sont plus complexes. Pour rester relativement simple dans la description de ces éléments, on parlera de doubles parois : une est à l'extérieur, c'est la carrosserie en tant que telle, et une est à l'intérieur, le plus souvent recouverte de garniture plastique ou autre pour le décor de l'habitacle. En définitive, en prenant en compte des éventuels renforts entre ces deux parois, nous définissons les surfaces grises avec une épaisseur moyenne de 2 mm.

### *Simulation de la réaction d'induit du modèle de départ*

Le modèle est soumis tour à tour à un champ magnétique uniforme longitudinal (selon la longueur du véhicule), puis transverse (selon la largeur) et enfin vertical (selon la hauteur).

La valeur appliquée est de l'ordre du champ magnétique terrestre afin que l'induction magnétique ambiante résultante à l'intérieur de l'habitacle puisse être comparable aux mesures.

La Figure II.4 présente le résultat du calcul de l'aimantation induite (en A/m) de ce modèle de départ lorsqu'il est soumis à un champ uniforme longitudinal (selon la longueur du véhicule) de 16 A/m (c'est-à-dire environ 20  $\mu$ T).



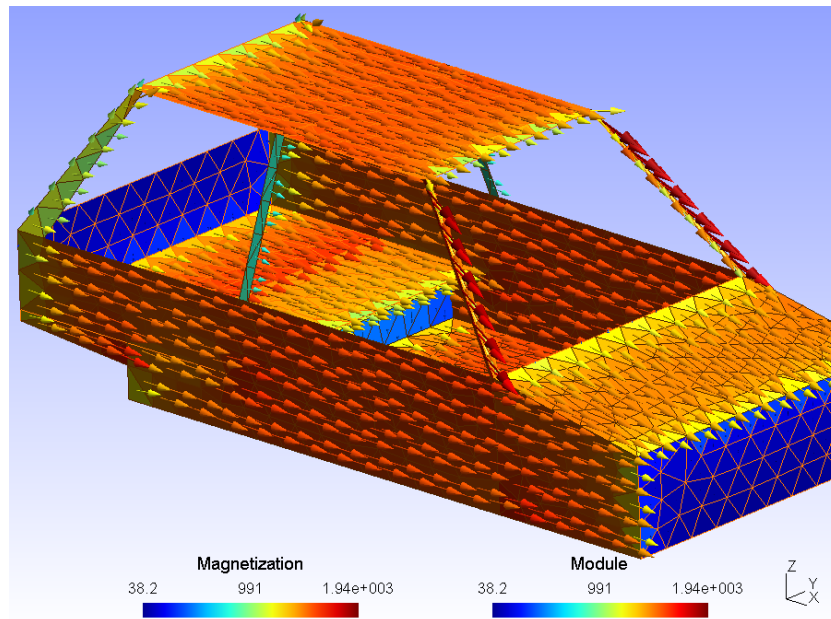


Figure II.4 : Aimantation induite (A/m) simulée des éléments ferromagnétiques soumis à un champ uniforme de 16A/m selon l'axe X

La Figure II.5 rappelle le positionnement des capteurs à l'intérieur de l'habitacle avec lesquels nous ferons la comparaison du modèle et de la mesure.

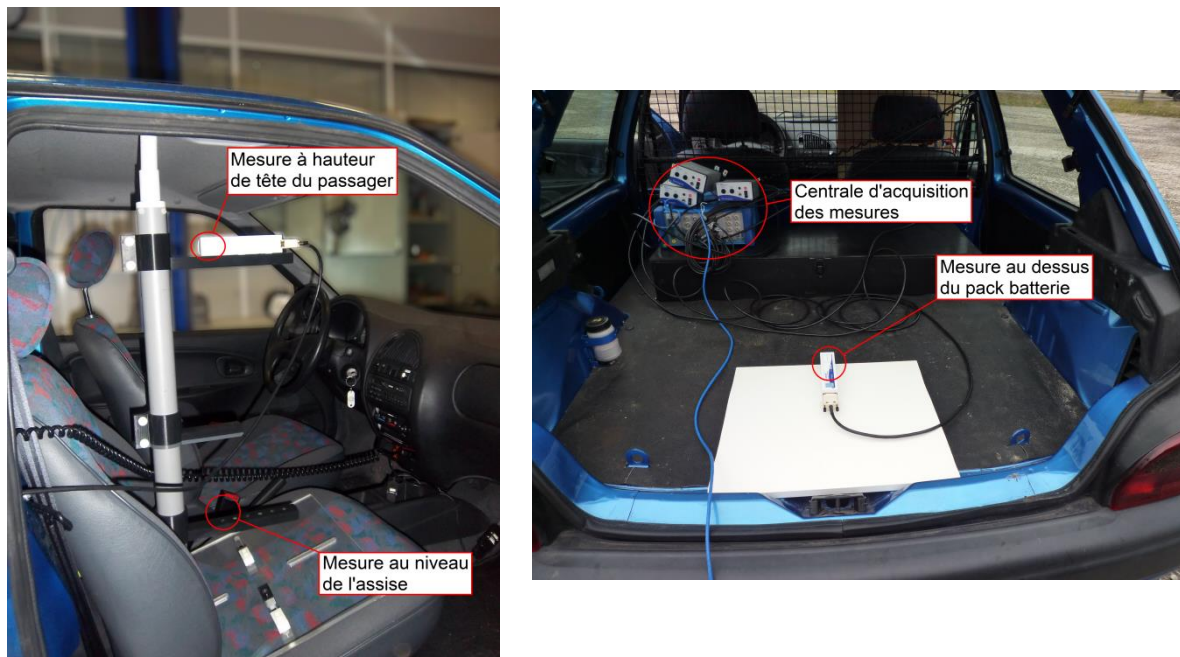


Figure II.5 : Positionnement des capteurs à l'intérieur de l'habitacle

Le Tableau II.1 présente les coefficients de blindage des composantes du champ magnétique obtenus avec ce premier modèle ferromagnétique, que l'on appellera «  $n^0 = 0$  ».

Ces résultats sont obtenus aux points de calcul équivalents aux points de mesures dont les coefficients de blindage pour les composantes longitudinales et transverse, obtenus expérimentalement sont par ailleurs rappelés pour comparaison. Rappelons également que nous n'avons pas pu évaluer le coefficient de blindage selon la composante verticale. Ainsi le résultat de simulation n'est présenté que pour information.

	Tête		Assise		Pack batterie	
	Mesure	Modèle 0	Mesure	Modèle 0	Mesure	Modèle 0
<b>Composante longitudinale</b>	0,922	0.929	0,907	0.922	0,898	0.899
<b>Composante transverse</b>	0,798	0.894	0,771	0.814	0,790	0.846
<b>Composante verticale</b>	/	0.985	/	0.830	/	0.888

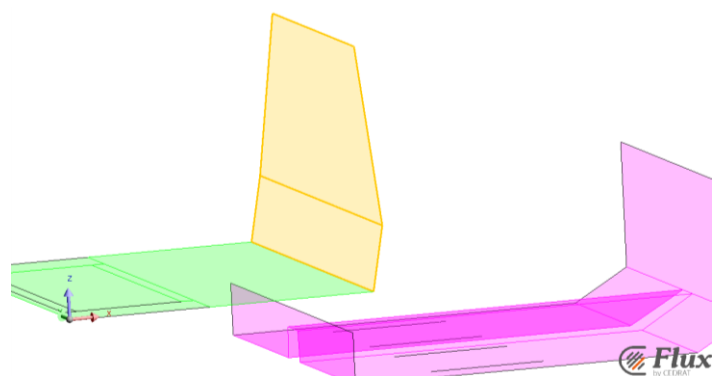
**Tableau II.1 : Coefficients de blindage des composantes du champ aux points de comparaison pour le modèle de départ**

Nous avons noté l'effet de forme anisotrope du véhicule lors des mesures présentées dans le chapitre précédent. Cet effet introduit un blindage plus important de la composante transverse (selon la largeur) que de la composante longitudinale (selon la longueur du véhicule). Ce modèle de départ fait également apparaître cette caractéristique mais les coefficients de blindage sont trop élevés d'une part et l'écart longitudinal/transverse n'est pas autant marqué qu'en pratique.

Ce modèle de départ va donc être complété par l'ajout de quelques éléments ferromagnétiques qui pourraient être à l'origine de l'écart entre le modèle et la mesure. L'analyse du véhicule permet de lister ces éléments potentiellement influents. Ils seront insérés les uns après les autres pour compléter le modèle de manière empirique.

### Affinement du modèle

Le plateau du coffre est séparé des passagers du véhicule par une grille verticale (Figure II.6 à gauche). Cet élément devrait majoritairement influencer les composantes verticale et transverse du champ magnétique et pourrait apporter la correction recherchée.



**Figure II.6 : (gauche) Grille de séparation entre le coffre et les passagers (droite) Élément de modélisation ajouté (surface jaune) au modèle de départ**

Cette grille est composée de fils d'acier d'environ 2 mm de diamètre et est maintenue par une armature tubulaire. On décrit ainsi une surface (jaune sur la Figure ci-dessus à droite) dont l'épaisseur est définie à 1 mm pour représenter le volume moyen équivalent.

Cet élément est ajouté au modèle de départ et la réaction magnétique de ce nouveau modèle, que l'on appellera «  $n^{\circ} = 1$  », est ensuite simulée.

Les coefficients de blindage alors obtenus sont indiqués par le Tableau ci-dessous avec le rappel des valeurs obtenus par les mesures.



	Tête		Assise		Pack batterie	
	Mesure	Modèle 1	Mesure	Modèle 1	Mesure	Modèle 1
<b>Composante longitudinale</b>	0,922	0.943	0,907	0.958	0,898	0.901
<b>Composante transverse</b>	0,798	0.837	0,771	0.784	0,790	0.840
<b>Composante verticale</b>	/	0.932	/	0.841	/	0.879

Tableau II.2 : Coefficients de blindage des composantes du champ aux points de comparaison pour le modèle complété n°1

Par comparaison avec les valeurs données dans le Tableau II.1, les coefficients de blindage des composantes transverse et verticale varient comme attendu. Cette variation n'apparaît néanmoins que pour les points de calcul présents au niveau du passager avant du véhicule. En effet, le point de calcul au-dessus du pack batterie, situé à l'arrière du véhicule, est trop éloigné de cet élément ferromagnétique pour être sous son influence.

Il est alors possible de séparer l'étude des points situés au niveau du passager avant des points situés à l'arrière du véhicule.

Concernant ces premiers points, il apparaît que les sièges pourraient apporter les corrections nécessaires. En effet, ceux-ci ont une armature en acier avec une grille de soutien pour les garnitures en mousse (ci-dessous à gauche). L'armature est tubulaire, de rayon 10 mm environ et d'épaisseur 1 mm. La grille est quant à elle composée de quelques fils d'acier d'environ 1 mm de rayon. Nous proposons alors le modèle (ci-dessous à droite) composé de deux éléments : des petites surfaces d'épaisseur 2 mm (éléments bleus foncés) pour l'armature et des surfaces d'épaisseur 0,2 mm (éléments bleus clairs) pour la grille de support. Les appuis tête ont également été modélisés par la petite surface d'épaisseur 2mm dans le plan vertical au-dessus du dossier. Cette description devrait affecter les trois composantes au niveau de l'assise et quelque peu la composante transverse au niveau de la tête.

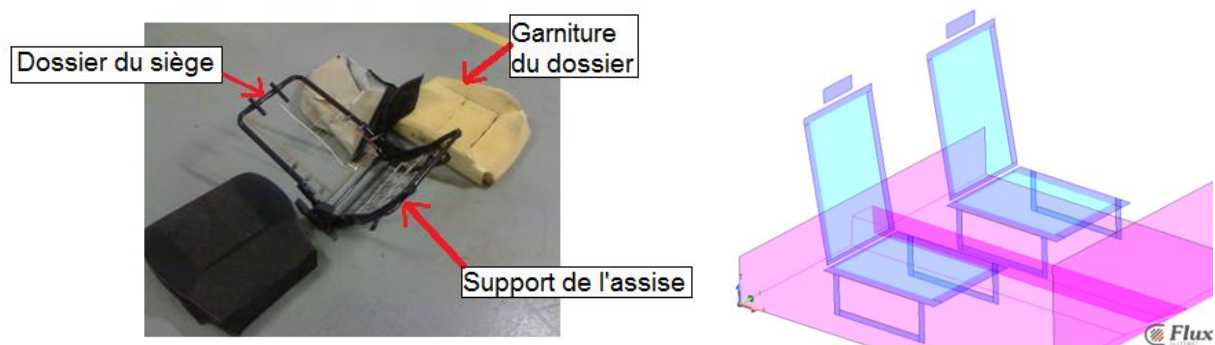


Figure II.7 : Composition d'un siège de Citroën Saxo (à gauche) et modèle numérique équivalent proposé (à droite)

Ces éléments sont ajoutés au modèle précédent puis la réaction magnétique est simulée (modèle n°= 2). Les coefficients de blindage alors obtenus sont indiqués dans le Tableau ci-dessous où l'on rappelle également les valeurs de référence obtenues par les mesures.

	Tête		Assise		Pack batterie	
	<i>Mesure</i>	Modèle 2	<i>Mesure</i>	Modèle 2	<i>Mesure</i>	Modèle 2
<b>Composante longitudinale</b>	0,922	0.937	0,907	0.895	0,898	0.903
<b>Composante transverse</b>	0,798	0.836	0,771	0.754	0,790	0.839
<b>Composante verticale</b>	/	0.941	/	0.822	/	0.878

**Tableau II.3 : Coefficients de blindage des composantes du champ  
aux points de comparaison pour le modèle complété n°2**

On observe effectivement la diminution des trois coefficients de blindage du champ au niveau de l'assise, prouvant l'importance du siège sur la répartition du champ magnétique au niveau du passager avant du véhicule.

Bien que des écarts subsistent entre le modèle et la mesure pour ces points de comparaison au niveau du passager, nous n'irons pas plus en détail sur la description des pièces ferromagnétiques car nous ne voulions mettre en évidence que les principaux paramètres d'influence.

Il ne reste plus qu'à étudier la zone placée au-dessus du pack batterie à l'arrière du véhicule. Celle-ci est positionnée à quelques centimètres au-dessus du plateau (Figure II.5) et à environ 30 cm du haillon de coffre : tous deux sont modélisés par une surface plane de 2 mm d'épaisseur.

Un plateau plus épais impacterait à la fois les composantes longitudinale et transverse. Or la composante longitudinale semble être déjà bien évaluée et cette proposition ne répond pas à notre objectif. Si la surface représentant le haillon était plus épaisse, cette modification n'impacterait effectivement que la composante transverse du champ mais l'éloignement du point de mesure conduirait probablement à définir une épaisseur bien trop importante. Une pièce supplémentaire, non identifiable de manière évidente, pourrait être à l'origine de notre recherche. Après vérification sous le véhicule, on aperçoit des longerons selon la largeur du véhicule, directement sous le plateau du coffre, sur lesquels le pack batterie est maintenu (Figure II.8 ci-après).

Ceux-ci sont creux en forme de « U » et relativement épais afin de supporter la masse du pack batterie qui est suspendu à ces derniers. Les surfaces décrivant ces longerons sont définies avec une épaisseur de 2 mm puis ajouté au modèle précédent.

Les coefficients de blindage alors obtenus sont en accord avec les hypothèses formulées. La Figure II.9 présente enfin le modèle final proposé des pièces ferromagnétiques et le Tableau II.4 indique les coefficients de blindage calculés avec le rappel des valeurs obtenues par les mesures.

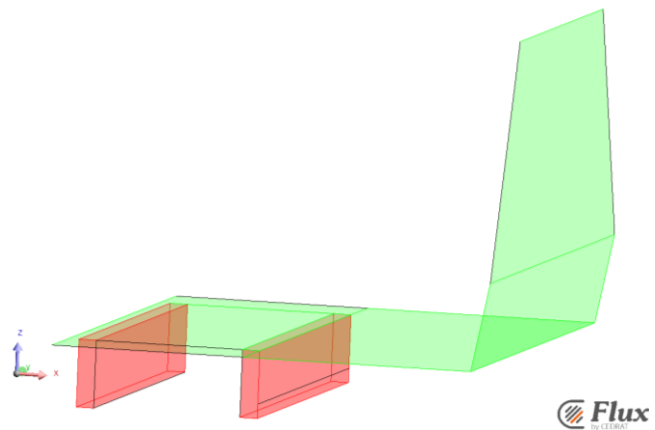
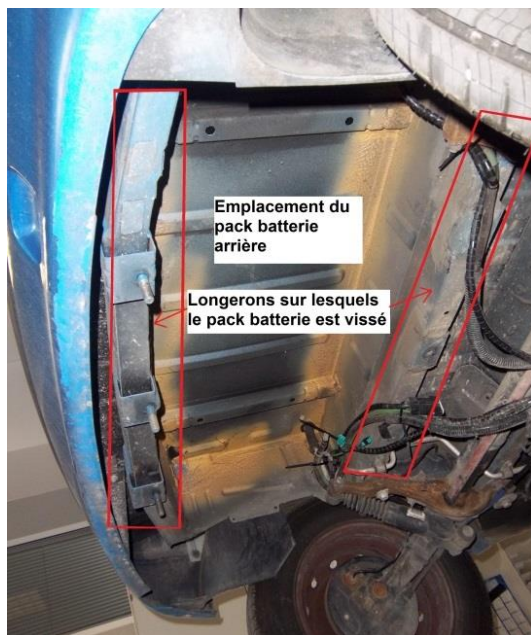


Figure II.8 : Mise en évidence de la présence de longerons transverses sous le véhicule (à gauche)  
Éléments de modélisation pour enrichir le modèle global (à droite)

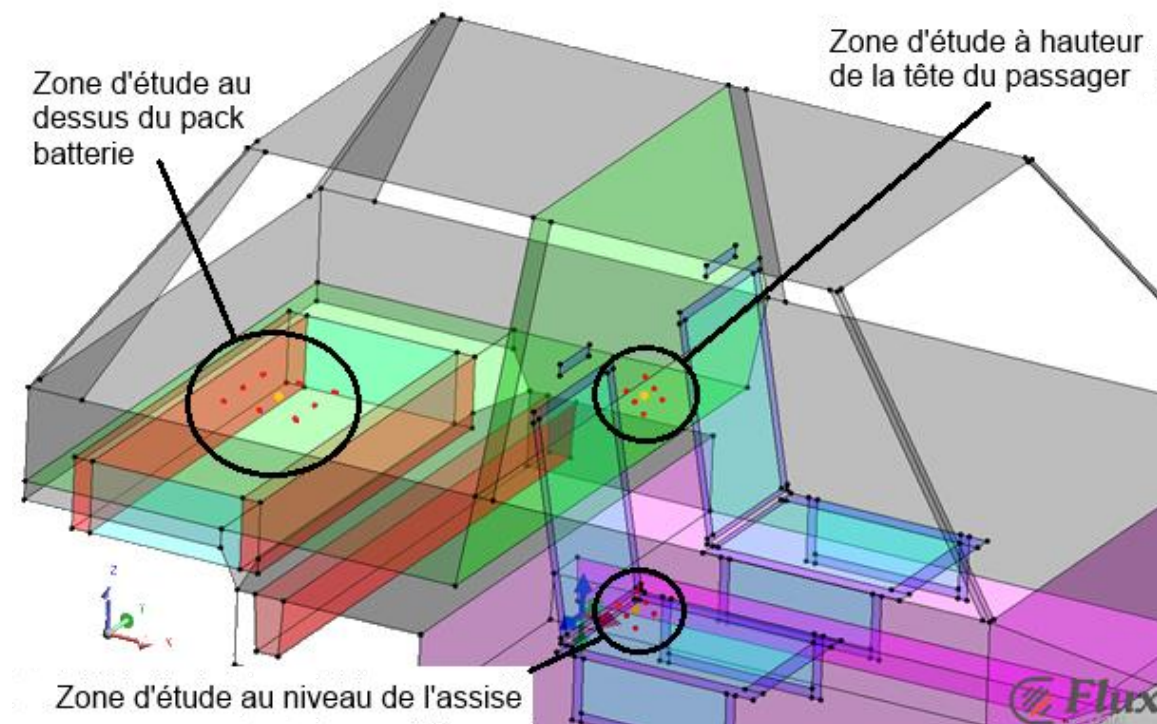


Figure II.9 : Modèle final des parties ferromagnétiques et position des points de calcul

	Tête		Assise		Pack batterie	
	Mesure	Modèle 3	Mesure	Modèle 3	Mesure	Modèle 3
Composante longitudinale	0,922	0.938	0,907	0.900	0,898	0.914
Composante transverse	0,798	0.830	0,771	0.749	0,790	0.761
Composante verticale	/	0.939	/	0.814	/	0.872

Tableau II.4 : Coefficients de blindage des composantes du champ  
aux points de comparaison pour le modèle final

Bien qu'il reste encore quelques écarts avec les valeurs obtenues en mesure, le modèle final présenté ici illustre assez bien les principaux paramètres expliquant la répartition du champ magnétique terrestre dans l'habitacle aux différents points de mesures.

Ceci n'est bien sûr qu'une proposition car on imagine aisément que d'autres configurations (épaisseurs, propriétés magnétiques, dimensions) pourraient conduire aux mêmes effets.

Rappelons que nous ne souhaitons en aucun cas développer un modèle très précis mais seulement décrire les principales caractéristiques. En effet les géométries décrites sont largement simplifiées et permettent certes de bons résultats mais au prix de beaucoup d'aller-retour entre le modèle et la mesure : c'est-à-dire plusieurs mois de travail.

Rappelons que cette démarche permet certes d'améliorer notre compréhension des phénomènes observés mais elle est surtout riche d'informations et orientera une démarche plus générale qui vise l'identification par problème inverse du champ magnétique à l'intérieur d'une zone.

### II.2.2. Boucles de courant

#### *Description géométrique*

A l'origine, ce véhicule était équipé de batteries en Nickel Cadmium (NiCd) aujourd'hui interdite à cause de leur toxicité. L'énergie volumique de cette technologie est plus faible que celle utilisée de nos jours : environ 110 Wh/l pour le Nickel Cadmium contre près de 220 Wh/l pour le Lithium Fer Phosphate.

C'est pourquoi le pack batterie se trouve être en réalité scindé en deux parties : une à l'arrière du véhicule sous le plateau du coffre et une à l'avant du véhicule dans le compartiment moteur. Ce véhicule appartenant aujourd'hui au CEA-Liten, son utilisation est dédiée à des travaux de recherche et le pack batterie a été changé en remplaçant les batteries NiCd par des cellules cylindriques au Lithium Fer Phosphate (LFP).

Le pack batterie reste néanmoins scindé en deux parties identiquement composées. Les cellules sont connectées en série pour former une chaîne et augmenter le niveau de tension. Les chaînes sont ensuite connectées en parallèle afin d'augmenter la quantité d'énergie.

Chaque partie du pack batterie est alors composée de 40 chaînes de cellules mais à cause de limitations pratiques (dimensions du coffre plastique contenant les cellules), les chaînes sont en réalité divisées en deux demi-chaînes. En définitive, chaque partie du pack batterie est composé de deux blocs de cellules positionnés l'un sur l'autre et connectés en série.

Ci-dessous, on illustre la configuration interne de la partie arrière du pack batterie : c'est-à-dire 2 blocs de cellules positionnés l'un sur l'autre, chacun composé de 40 demi-chaînes. En définitive, le volume occupé par les cellules est de 10 demi-chaînes par 8 demi-chaînes sur 1 demi-chaîne composée de 10 cellules cylindriques. La partie avant du pack batterie est également composée de 2 blocs de cellules alors réparties comme suit : 8 demi-chaînes par 10 demi-chaînes sur 1 demi-chaîne de 10 cellules cylindriques.

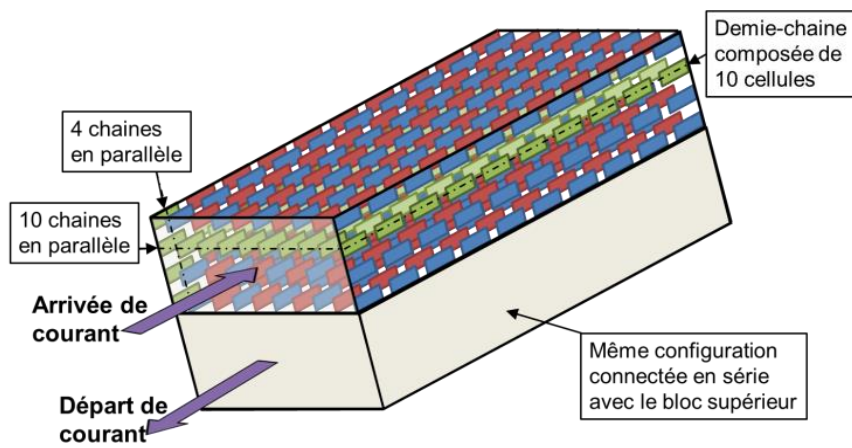


Figure II.10 : Schéma de principe de la composition du pack batterie arrière

Rappelons que les courants électriques peuvent être modélisés par des densités linéiques car les zones d'étude de l'induction magnétique sont suffisamment éloignées (la distance d'observation est bien supérieure aux diamètres des cellules et des câbles).

Les cellules mises en jeu dans le pack batterie sont cylindriques de diamètre 25 mm et de longueur 60 mm. Ainsi en tenant compte des pièces de connexion entre les cellules d'une demi-chaîne, cette dernière sera représentée par une ligne de courant de longueur 650 mm et passant par le centre des cellules. En tenant compte à présent de la colle solidarissant les demi-chaînes entre elles, les lignes de courant seront alors espacées les unes des autres de 27 mm.

Toute cette analyse permet la modélisation des lignes de courant représentant les cellules composant chaque partie du pack batterie.

Ces deux parties composant le pack batterie sont par ailleurs mises en série puis connectées au convertisseur de puissance. Deux câbles de puissance traversent donc le véhicule (depuis l'arrière vers l'avant) sous le châssis de ce dernier. L'étude approfondie du passage de ces câbles permet la modélisation des principales caractéristiques géométriques de ces derniers. La Figure II.11 présente le modèle complet de l'inducteur électrique ainsi développé.

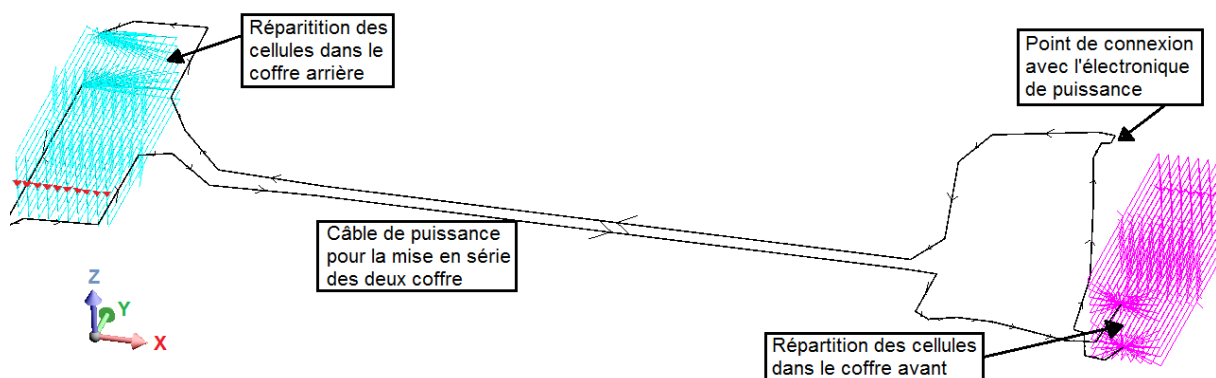


Figure II.11 : Modèle du circuit électrique de puissance



### Calcul du champ magnétique généré

Le champ magnétique émis dans l'air par cet inducteur électrique s'obtient directement par les lois de Biot et Savart.

Les figures suivantes présentent les iso-valeurs de l'induction magnétique calculée pour 100 A de courant électrique en circulation.

La Figure II.12 donne le résultat calculé sur un plan horizontal équivalent au plateau du coffre présenté lors de la modélisation des pièces ferromagnétiques (c'est-à-dire 120 mm au-dessus du haut du pack batterie arrière). La Figure II.13 donne le résultat calculé sur un plan horizontal équivalent au sommet du tunnel d'échappement présent au niveau du plancher de l'habitacle (c'est-à-dire 110 mm au-dessus des câbles de puissance).

L'intérêt de ces figures réside dans l'évaluation du niveau d'induction magnétique généré par le circuit électrique décrit. Le calcul est réalisé dans l'air à proximité de zones qui en réalité contiennent des pièces ferromagnétique : le plateau du coffre ou les éléments du châssis. Ces niveaux d'induction seront alors source d'aimantation induite des pièces ferromagnétiques.

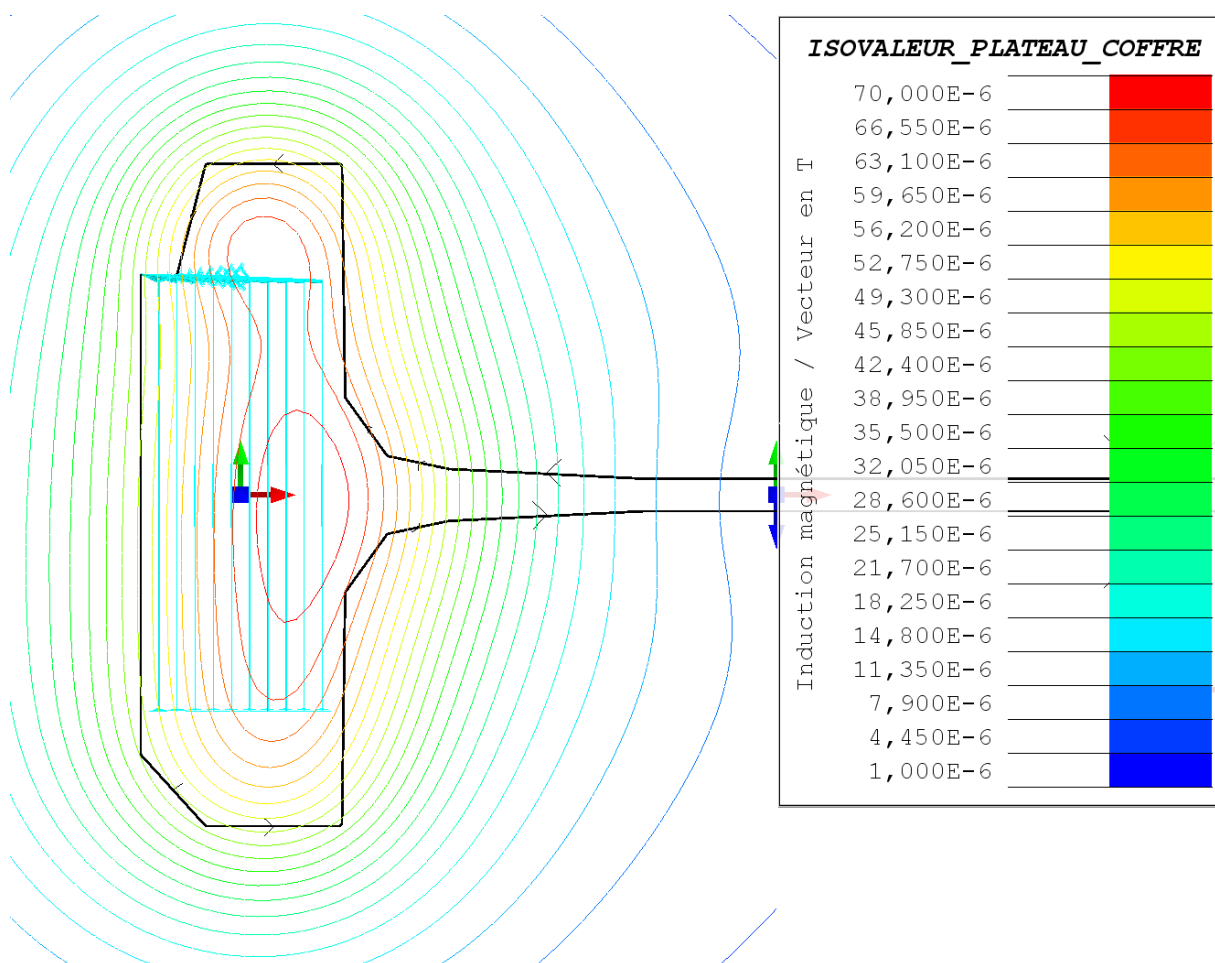


Figure II.12 : Iso-valeurs de l'induction magnétique calculée dans l'air pour 100A sur un plan équivalent au plateau du coffre

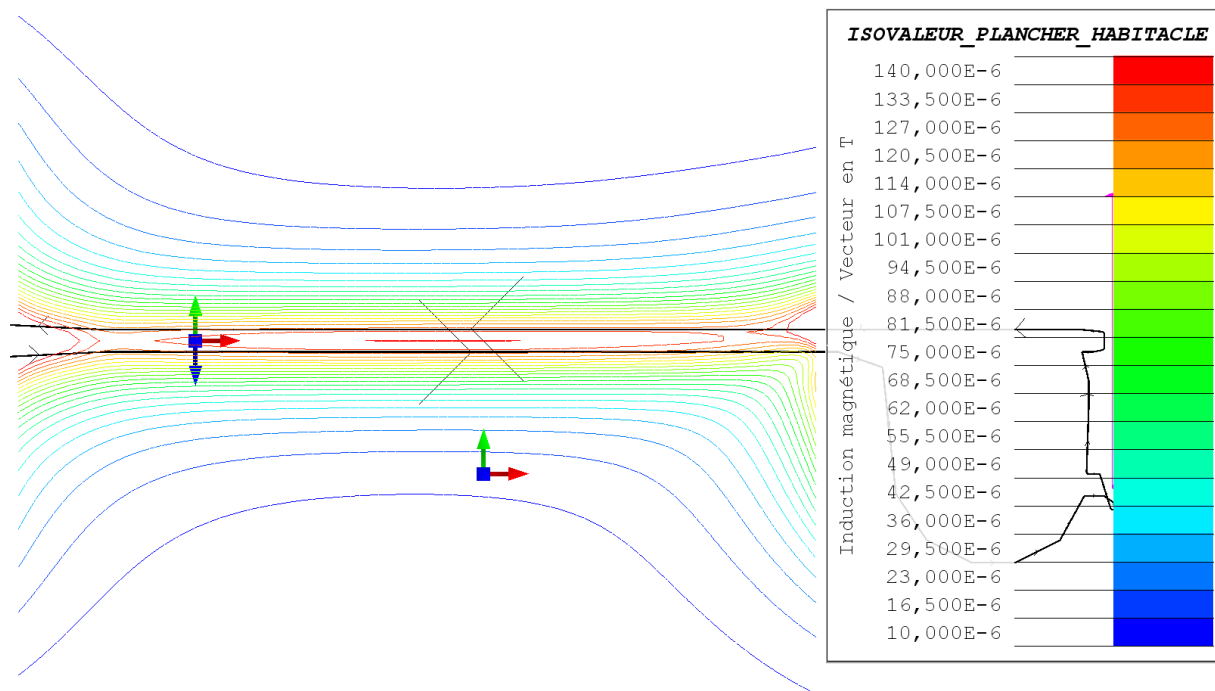


Figure II.13 : Iso-valeurs de l'induction magnétique calculée dans l'air pour 100A sur un plan équivalent au sommet du tunnel de la ligne d'échappement

On constate que le niveau d'induction généré par 100 A de courant électrique reste de l'ordre du champ magnétique terrestre (pour rappel, environ 50  $\mu\text{T}$  en module). Par ailleurs, pour le véhicule étudié ici, le courant électrique se développant dans ce circuit peut atteindre 200 A au maximum. Dans ces conditions, le niveau d'induction maximum généré atteindrait le rapport de 3 fois le champ terrestre au niveau du plateau du coffre et 6 fois sur le haut du tunnel d'échappement au niveau du plancher de l'habitacle.

Or ces niveaux restent dans le domaine des champs faibles et la réaction d'aimantation sera également linéaire.

Cette hypothèse semble par ailleurs être confirmée par les observations que nous avons faites dans le chapitre précédent (Figure I.9). Les mesures d'induction montraient en effet une variation linéaire du niveau de champ à l'intérieur de l'habitacle en fonction de la quantité de courant de puissance en circulation.

En définitive, le modèle des pièces ferromagnétiques reste compatible avec cette source (hypothèse des champs faibles). Ce nouveau modèle de sources sera intégré au précédent modèle afin d'en étudier l'influence et comparer les résultats de simulation avec les mesures.

## II.3. Vers une réduction du champ magnétique créé par le circuit de puissance

Cette sous partie traite de la modélisation du circuit de puissance. Après une validation du modèle, elle propose, par son utilisation, quelques pistes pour limiter le champ dans l'habitacle.

### II.3.1. Validation du modèle

Afin que les résultats présentés dans ce paragraphe soient concis, nous ne calculerons l'induction magnétique que sur quelques points à l'intérieur de l'habitacle. Ces points sont espacés de 10 mm pour former une ligne de calcul partant de l'arrière du véhicule jusqu'à l'emplacement du Tableau de bord (la ligne rouge sur la Figure II.14). Cette ligne est centrée selon la largeur du véhicule et à quelques centimètres au-dessus du plateau du coffre (c'est-à-dire à la même hauteur que le plan de calcul présenté plus haut).

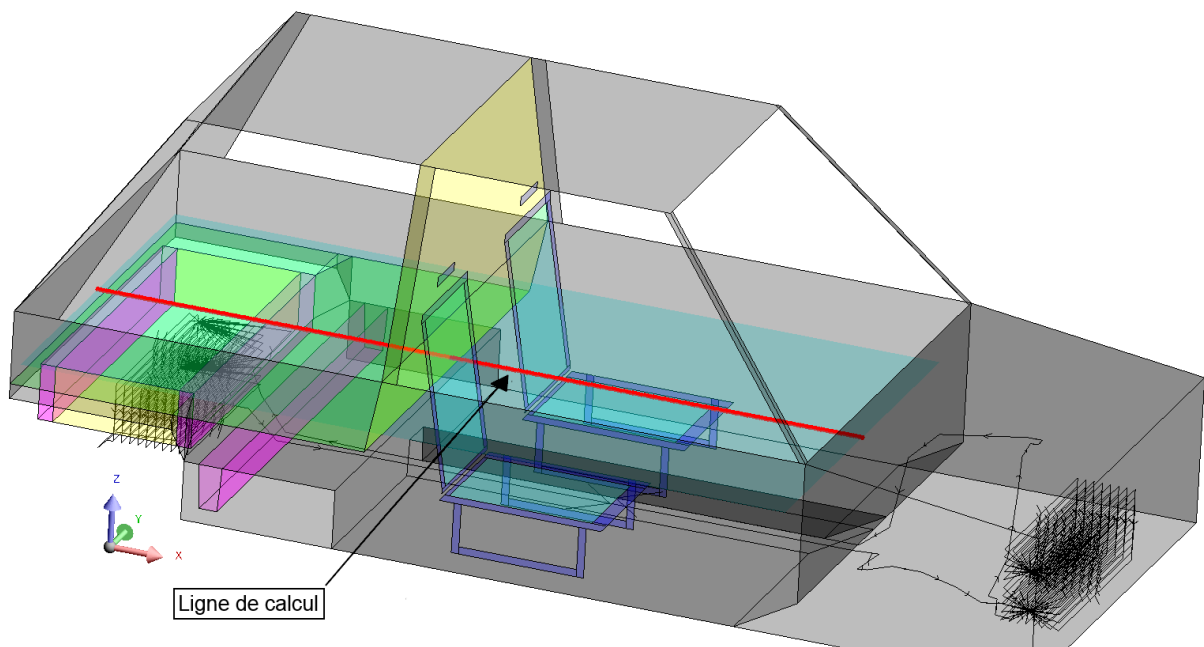


Figure II.14 : Ligne de calcul de l'induction dans l'air sur le modèle complet (ferromagnétique et boucles de courant)

La Figure II.15 présente le niveau d'induction magnétique calculé le long de cette ligne en l'absence et en présence des pièces ferromagnétiques lorsque 100 A sont en circulation dans les boucles de courant. La différence observée entre ces deux courbes illustre clairement l'influence des éléments ferromagnétiques.

L'aimantation induite des pièces ferromagnétiques dans ce champ inducteur est présentée Figure II.19.

Par ailleurs, le Tableau II.5 compare la variation du champ calculée par le modèle aux points de comparaisons équivalents des mesures.

Les résultats tendent à confirmer les hypothèses développées et valident le modèle complet ainsi présenté.



	Tête		Assise		Pack batterie	
	Mesure	Modèle	Mesure	Modèle	Mesure	Modèle
Variation en nT/A	15	10	90	100	450	400

Tableau II.5 : Variation du champ en fonction du courant électrique de puissance

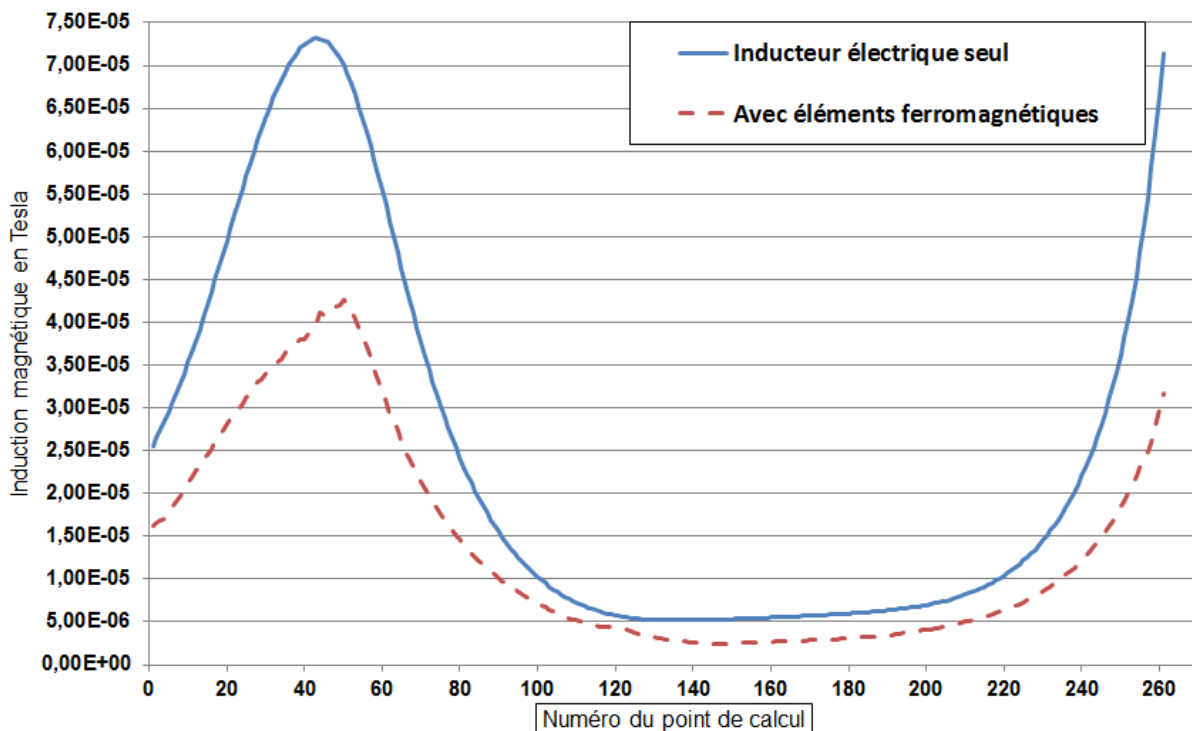


Figure II.15 : Module de l'induction magnétique le long de la ligne de calcul avec et sans éléments ferromagnétiques (pour 100A en circulation)

### II.3.2. Analyse des pistes d'amélioration

Nous ne travaillerons pas sur les éléments ferromagnétiques. En effet, nous avons déjà fait remarquer que les véhicules actuels intègrent de plus en plus de pièces en aluminium ou en plastique, ce qui aura pour effet de réduire l'action de blindage des champs sources.

Or indépendamment de ce phénomène, il paraît pertinent d'agir sur les équipements embarqués afin que les champs générés soient plus faibles.

Nous n'analyserons donc que les boucles de courant qui sont à l'origine du champ magnétique créé à l'intérieur de l'habitacle. Il s'agit donc de se focaliser sur la proposition de règles de câblage.

Rappelons que le pack batterie de ce véhicule est scindé en deux parties, une à l'avant et une à l'arrière, mises en série. Cette mise en série est réalisée par une paire de câbles de puissance traversant le véhicule selon la longueur. Ces câbles sont parcourus par la même valeur de courant électrique mais dans des directions opposées (par exemple l'aller-retour présent sous le châssis).

Comme on peut s'en apercevoir sur la Figure II.11 qui présente la modélisation du circuit électrique, les câbles de puissance (en noir) se séparent à plusieurs reprises. Pour le demi-pack batterie situé à l'arrière, les câbles se séparent tout simplement pour rejoindre le connecteur correspondant. Les connecteurs du demi-pack batterie situé à l'avant sont quant à eux côte à côte mais les câbles se séparent tout de même. En effet, le premier se connecte directement à l'électronique de puissance tandis que le second se connecte au demi-pack batterie avant. Le circuit est ensuite fermé par un dernier morceau de câble partant de ce demi-pack batterie vers l'électronique de puissance.

Cette configuration décrit alors deux grandes boucles de courant, une à l'arrière sous le plateau du coffre et une à l'avant dans le compartiment moteur. Or on sait que ces boucles sont génératrices de champ magnétique dont l'amplitude est proportionnelle à la surface.

Il paraît donc assez simple de modifier ce câblage de puissance sans impacter le niveau de tension et d'énergie du pack batterie. La Figure II.16 illustre la modification envisagée en tentant de laisser ces deux câbles toujours l'un à côté de l'autre.

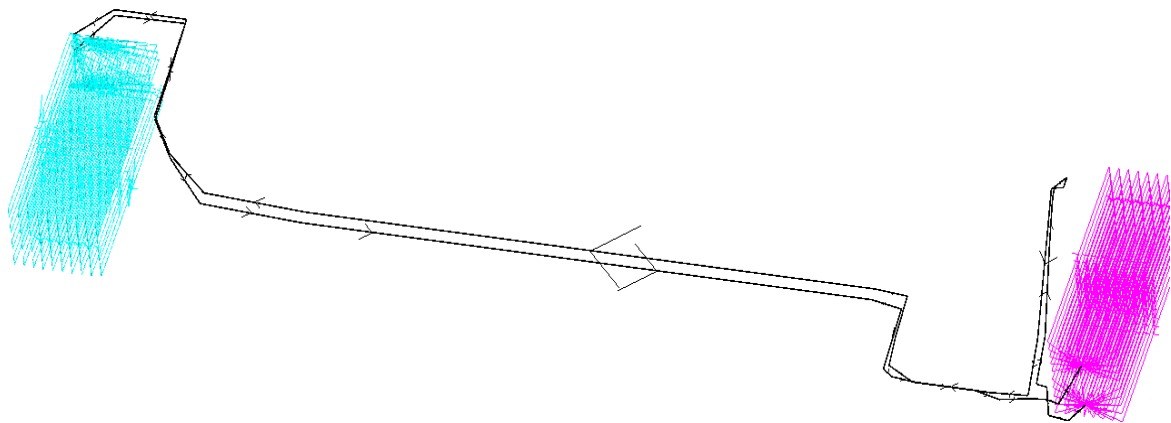


Figure II.16 : Modèle modifié (câblage) du circuit électrique de puissance

Analysons à présent la répartition du courant électrique à l'intérieur des demi-packs batterie. On remarque que la disposition des cellules engendre deux gros volumes de courant électrique placés l'un sur l'autre et parcourus par la même valeur mais de direction opposée.

Cette configuration peut cependant être optimisée en matière de génération de champ. La construction permet une réorganisation des demi-chaînes de cellules qui devrait réduire le niveau de champ généré.

On garde bien évidemment les contraintes de niveau de tension et d'énergie qui doivent rester inchangés. Le principe consiste à placer côte à côte deux courants linéiques identiques mais de direction opposée (Figure II.17). Ainsi la direction du courant électrique change lorsque l'on passe d'une demi-chaîne de cellules à la demi-chaîne adjacente. Cela est source de plusieurs petites boucles de courant dont le sens de parcours s'inverse lorsque l'on passe de l'une à l'autre. Le champ magnétique global généré devrait donc être réduit.

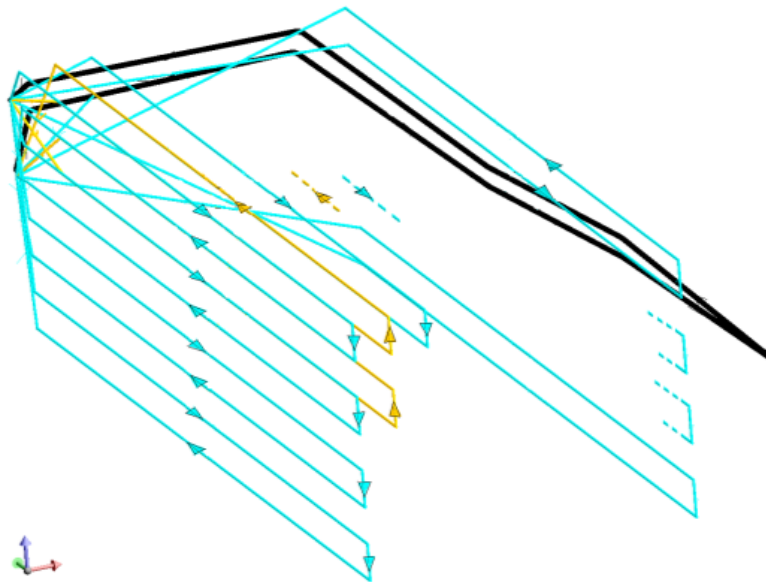


Figure II.17 : Réorganisation de la répartition du courant dans les cellules du pack batterie

### II.3.3. Mise en œuvre numérique des modifications

Dans un premier temps, observons l'influence de ces propositions de modification du circuit électrique sur le niveau de champ généré.

Le calcul de l'induction magnétique est réalisé le long de la ligne présentée plus tôt.

La Figure II.18 présente les niveaux d'induction calculés le long cette ligne selon la version du circuit de puissance. La courbe bleue est un rappel du niveau calculé avec le circuit de puissance « d'origine ». La courbe rouge présente le niveau calculé lorsque seul le câblage est modifié et la courbe verte présente la même chose lorsque la répartition du courant dans le pack batterie est également modifiée.

Le module maximum calculé le long de cette ligne est divisé d'environ un facteur 3 lorsque seulement les câbles de puissances sont modifiés. La modification supplémentaire apportée à la répartition des courants dans le pack batterie réduit encore d'un facteur 7 l'amplitude maximale. En définitive, on observe un facteur d'environ 24 entre la configuration d'origine et la dernière configuration proposée.

Le Tableau ci-dessous relève alors les principales valeurs caractéristiques.

	Niveau maximum	Niveau moyen
<b>Configuration d'origine</b>	73 $\mu$ T	27.5 $\mu$ T
<b>Modification des câbles</b>	23 $\mu$ T	9 $\mu$ T
<b>Modification des câbles et des cellules</b>	3 $\mu$ T	2.5 $\mu$ T

Tableau II.6 : Valeurs caractéristiques du champ généré par la source calculées sur la ligne d'étude en fonction des modifications opérées

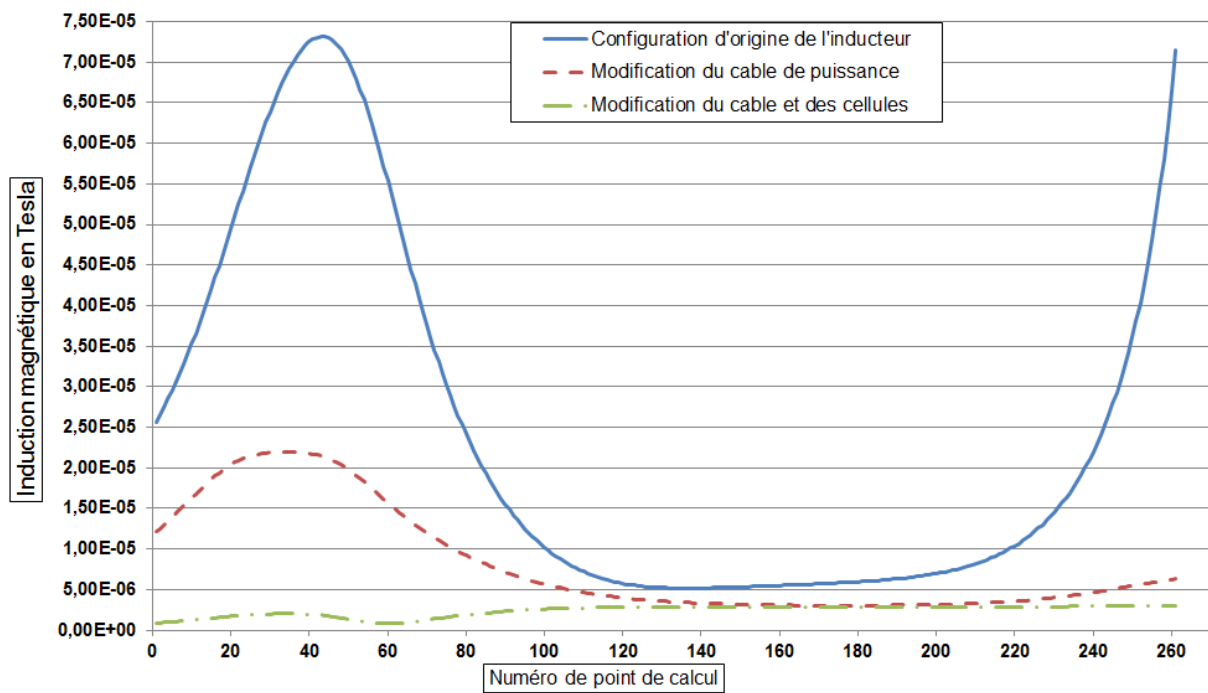


Figure II.18 : Induction magnétique générée par les boucles de puissance calculée en fonction des modifications proposées (pour 100A en circulation)

La Figure II.19 illustre l'aimantation induite du modèle des pièces ferromagnétiques lorsque les boucles de courant sont dans la configuration d'origine. Pour comparaison, la Figure II.20 présente l'aimantation induite de ce même modèle lorsque la répartition des câbles et les cellules ont été modifiées.

L'échelle d'affichage reste la même afin de démontrer la réduction du niveau de l'aimantation induite.

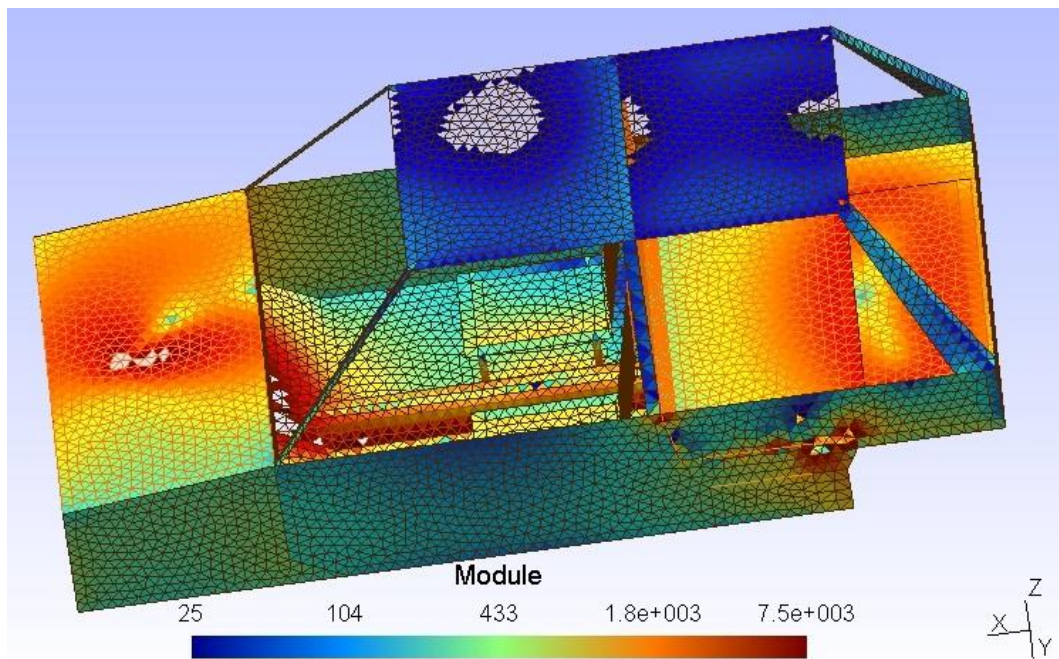


Figure II.19 : Aimantation induite (en A/m) du modèle des pièces ferromagnétiques lorsque le champ source provient des boucles de courant (100 A)



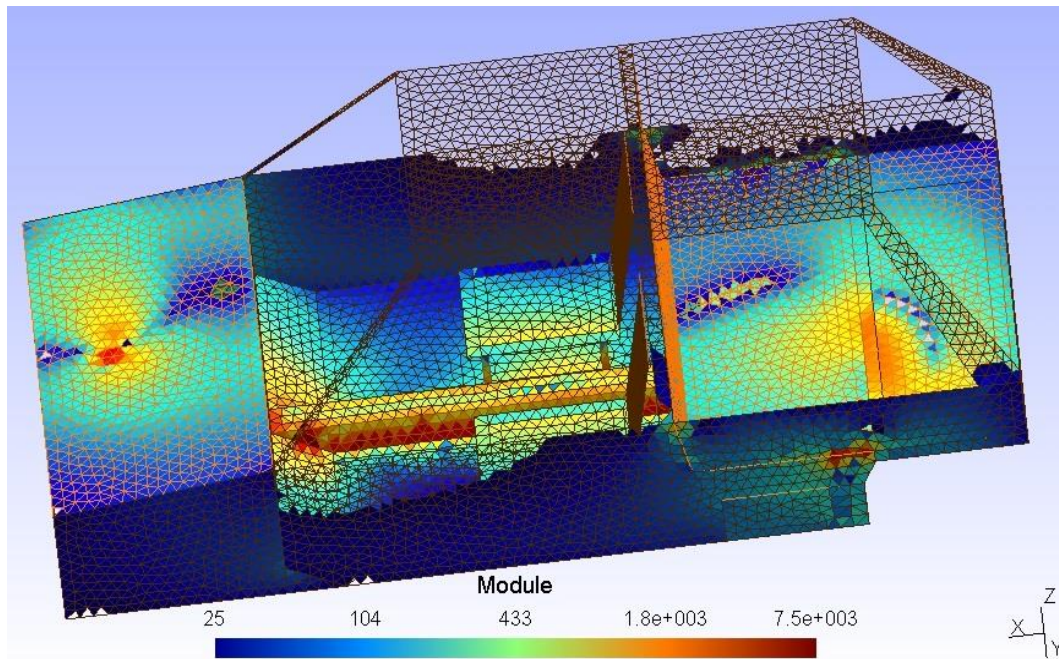


Figure II.20 : Aimantation induite (en A/m) du modèle des pièces ferromagnétiques après modifications complètes des boucles de courant (100 A).

Le modèle complet développé faisant intervenir la description des pièces ferromagnétiques et des boucles de courant de puissance s'avère très utile pour illustrer l'importance de la réalisation électrique du pack batterie et du câblage associé.

Les propositions de modification, mises en œuvre sur le modèle, illustrent clairement le possible gain concernant le niveau de champ généré.

Rappelons que les mesures présentées dans le chapitre précédent ont montré que sur tous les véhicules, les plus fortes variations s'obtiennent à proximité de ces éléments. Or le pack batterie est de plus en plus souvent placé sous le plancher de l'habitacle de bon nombre de véhicules récents. Il semble donc important d'apporter une attention toute particulière à la réalisation électrique de ce dernier.

## Conclusions intermédiaires

La démarche de modélisation menée a permis de mettre en évidence les principaux paramètres expliquant les niveaux relevés au cours des mesures. Les principales pièces ferromagnétiques ont été décrites (châssis, carrosserie, armature des sièges) sur la base d'observations et de phénomènes physiques connus (réaction d'induit d'une tôle ferromagnétique) et le circuit électrique de puissance (pack batterie et câblage associé) a également été décrit à partir de connaissances assez fines de celui-ci.

Les résultats obtenus avec le modèle complet sont très satisfaisants compte tenu du degré de précision obtenu face à la complexité du système modélisé. Toutefois, la complexité de la démarche est réelle et il est fort à parier que celle-ci devra être réalisée de nouveau pour chaque véhicule. C'est surtout l'approche itérative qui s'est montrée particulièrement laborieuse. S'il est possible de réaliser ce type d'approche dans un contexte de recherche, sa complexité la rend inexploitable dans un contexte opérationnel et il nous faut donc trouver une solution alternative.

Nous avons utilisé la mesure pour recalibrer notre modélisation par problème directe. Nous proposons à présent d'utiliser cette mesure directement dans la résolution, c'est-à-dire pour résoudre un problème inverse. Il s'agit ainsi de déterminer les sources en fonction des effets. Naturellement, de la même manière que dans le domaine du magnétisme du navire [LEGRIS 96], [CHADEBEC 01], [VUILLERMET 08], nous pouvons imaginer d'inverser notre modèle présenté dans ce chapitre. Ceci semble pourtant difficile car le nombre de degrés de liberté à déterminer semble trop important (valeur des aimantations sur toute la carrosserie, positions de conducteurs, valeur des courants, etc.) et le nombre de capteur très limité.

Il est impératif de trouver un modèle à inverser beaucoup plus compact. Le chapitre suivant s'attelle donc à présenter une écriture mathématique générale de l'induction magnétique dans l'air reliée à un modèle de source léger : la décomposition en harmoniques sphériques.



## Chapitre III :

# Décomposition harmonique du champ magnétique

---





## Introduction

On souhaite avoir une écriture générale et compacte de l'induction magnétique dans l'air quelle que soit la ou les sources statiques à l'origine de celle-ci. On entend par compacte le fait que cette écriture dépende de peu de degrés de liberté. En effet, nous avons présenté dans le chapitre précédent un modèle qui en comportait plusieurs milliers (les aimantations liées au maillage des pièces ferromagnétiques et les courants dans les câbles). Nous avons vu également qu'une modélisation directe est certes riche d'enseignements mais pas réellement satisfaisante, trop de paramètres restant mal maîtrisés. Nous envisageons donc de résoudre un problème inverse mais il serait illusoire ici de vouloir identifier toutes les aimantations et courants à partir de quelques mesures ponctuelles. Il faut donc changer de base de description du champ magnétique et trouver une décomposition de celui-ci pilotée par un nombre réduit de paramètres.

Dans le cadre de nos travaux, on ne s'intéresse qu'à la répartition du champ magnétostatique dans l'air et nous n'étudierons donc que le système d'équations suivant.

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \qquad \text{(Equation du flux magnétique)} \qquad \textbf{(III.1)}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = 0 \qquad \text{(Equation de Maxwell - Ampère)} \qquad \textbf{(III.2)}$$

La résolution générale de ce système peut s'appuyer sur l'utilisation de fonctions harmoniques sphériques. Or, ce type de décomposition peut certainement répondre à notre problématique de compacité.

Ces fonctions sont bien connues des mathématiques [ROBIN 57], [ANGOT 72] et sont tout autant utilisées en physique quantique [MARCHIDON 00], en géoscience [CAPDEROU 12], [LEGAUT 05] ou pour les représentations informatiques de maillages 3D [MOUSA 07]. Dans un domaine plus proche de nos travaux, cette écriture harmonique a déjà été mise en œuvre à plusieurs reprises : [KERADEC 91], [LEGRIS 96], [KILDISHEV 98], [KILDISHEV 02] ou encore [VINCENT 09].

Bien que ces travaux démontrent l'intérêt de ces fonctions pour l'étude du champ dans l'air, leurs résultats ne s'appliquent pas directement à notre problématique. En effet, ceux-ci sont développés pour toute la zone entourant les sources, or rappelons que nous souhaitons connaître le champ partout à l'intérieur d'une zone entourée des sources : nous verrons alors que l'écriture harmonique nécessaire est quelque peu différente.

Dans ce chapitre, après un bref rappel des méthodes de résolution générales des équations de Maxwell en magnétostatique, nous illustrons l'utilisation des fonctions harmoniques pour le calcul formel de l'induction magnétique à proximité d'une source (cas d'école en deux dimensions). Nous passons ensuite au cas général en trois dimensions que nous appliquons au modèle précédemment développé.

### III.1. Rappels sur la résolution des équations de Maxwell

La résolution naturelle du système d'équations composé de (III.1) et (III.2) fait intervenir un potentiel vecteur magnétique ( $\mathbf{A}$ ) dont le rotationnel conduit à l'induction.

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) \quad (\text{III.3})$$

Rappelons que notre étude se déroule dans un milieu homogène et isotrope, l'air, et que la loi d'aimantation (domaine des champs faibles) est linéaire. Il en résulte l'équation (III.4) qui relie l'induction magnétique ( $\mathbf{B}$ ) au vecteur d'excitation magnétique ( $\mathbf{H}$ ) par l'intermédiaire de la perméabilité magnétique ( $\mu$ ) du milieu.

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (\text{III.4})$$

Ainsi, par insertion de la solution (III.3) dans l'équation de Maxwell-Ampère grâce à la relation (III.4) et après application de la jauge de Coulomb ( $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ ), on obtient l'équation de Laplace dont la solution générale fait apparaître des fonctions périodiques.

$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad (\text{III.5})$$

Selon les cas, il peut cependant être plus commode d'utiliser le potentiel scalaire magnétique ( $\psi$ ). En effet, l'équation de Maxwell - Ampère indique qu'une répartition de courant électrique est source de champ magnétique mais en l'absence de ces derniers dans la zone d'étude, cette équation admet une solution qui dérive d'un potentiel scalaire.

$$\mathbf{H} = -\text{grad}(\psi) \quad (\text{III.6})$$

Par introduction de cette solution dans l'équation de flux magnétique, on arrive encore une fois à l'équation de Laplace mais faisant intervenir le potentiel scalaire magnétique.

$$\Delta \psi = 0 \quad (\text{III.7})$$

Que l'on utilise le potentiel vecteur magnétique ( $\mathbf{A}$ ) ou le potentiel scalaire magnétique ( $\psi$ ), l'équation de Laplace mettant en jeu l'un ou l'autre doit trouver solution.

La littérature [DURAND 64], [ANGOT 72] traite la résolution générale de cette équation en coordonnées cylindriques ou sphériques par la méthode de la séparation des variables en faisant apparaître l'utilisation de fonctions périodiques, dites harmoniques.

## III.2. Ecriture harmonique en deux dimensions (2D)

Nous proposons la prise en main de l'écriture harmonique dans le repère cylindrique  $(r, \varphi, z)$  par l'étude purement pédagogique du champ généré par un conducteur linéique rectiligne de longueur infinie et parcouru par un courant «  $I_0$  ». Les caractéristiques de cette source permettent de limiter l'étude de l'induction magnétique au plan perpendiculaire au conducteur.

### III.2.1. Ecriture du potentiel vecteur magnétique

Centrons le repère d'étude sur le conducteur et utilisons le potentiel vecteur magnétique par ailleurs connu analytiquement dans ce cas : de direction principale parallèle à l'axe du conducteur, il ne dépend que de la valeur du courant «  $I_0$  » et de la distance «  $r$  » séparant le point d'étude «  $M$  » du conducteur.

$$\mathbf{A} = A_z \cdot \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(r) \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{III.8})$$

Le calcul du rotationnel en coordonnées cylindriques conduit alors aux composantes radiales et ortho-radiales de l'induction magnétique. On retrouve ainsi l'expression des iso-valeurs de l'induction formant des cercles concentriques autour du conducteur.

$$B_r \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \cdot \mathbf{e}_r \quad (\text{III.9})$$

$$B_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r} \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{III.10})$$

Ce résultat n'est néanmoins qu'un cas particulier issu des caractéristiques de la source.

En effet, La solution générale de l'équation de Laplace d'une fonction «  $X$  » ( $\Delta X = 0$ ), s'obtient par la méthode de séparation des variables et s'écrit comme suit [SCHMERBER 06] :

$$X(r, \varphi) = [A_0 \cdot \ln(r) + B_0] + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cdot r^n + B_n \cdot r^{-n}] \cdot [C_n \cdot \cos(n\varphi) + D_n \cdot \sin(n\varphi)] \quad (\text{III.11})$$

Où  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont des coefficients uniquement liés à la source de champ. On retrouve par ailleurs le potentiel (III.8) auquel s'ajoute une série harmonique.

Pour des raisons physiques évidentes, le potentiel ne peut pas être infini et une partie de la série harmonique (soit croissante, soit décroissante avec le rayon «  $r$  ») est généralement écartée. On distingue ainsi un problème que l'on qualifie d'interne (solution croissante en «  $r^n$  ») de celui que l'on qualifie d'externe (solution décroissante en «  $1/r^n$  »). Les travaux cités en référence dans l'introduction de ce chapitre se tous placent en problème externe alors que les notre sont en problème interne.

Seul [SCHMERBER 06] a également travaillé avec les termes croissant en «  $r^n$  » mais toujours en gardant les sources au centre de la zone d'étude alors que nos travaux placent toutes les sources autour de la zone d'étude.

Nous allons montrer l'existence de ces deux solutions pour l'étude de l'induction créée par un conducteur linéique rectiligne de longueur infinie. Nous nous placerons dans le cas général où ce dernier n'est pas centré sur le repère d'étude (Figure III.1).

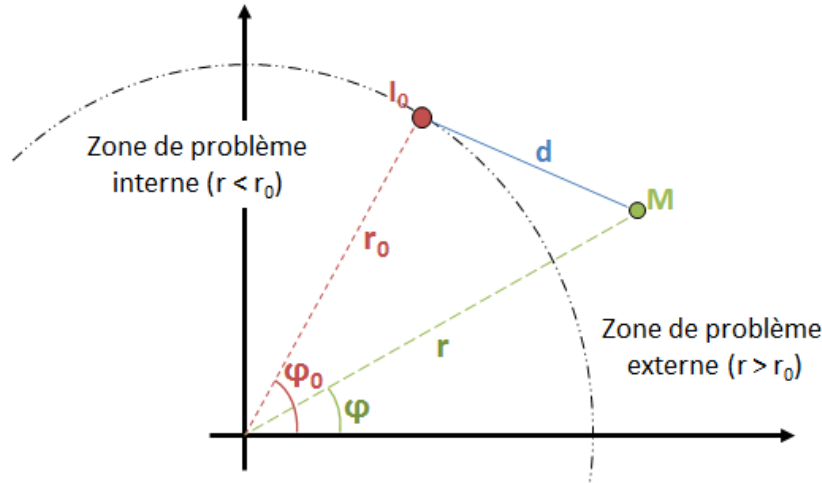


Figure III.1 : Schéma paramétré pour l'étude de l'induction magnétique à proximité d'un conducteur décentré

Cette démarche est purement pédagogique afin de prendre en main l'écriture harmonique et comprendre son utilité. Par ailleurs, nous noterons  $(a_n, b_n)$  les coefficients harmoniques du problème interne et  $(\alpha_n, \beta_n)$  les coefficients harmoniques du problème externe.

### III.2.2. Calcul des coefficients harmoniques

#### Le problème externe

Reprenons l'expression du potentiel vecteur autour du conducteur appliqué au paramétrage présenté par la Figure III.1.

$$\mathbf{A} = A_z \cdot \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(d) \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{III.12})$$

Le repère d'étude n'étant plus centré sur la source, nous nous baserons sur les travaux [KERADEC 91] et [DURAND 66] afin de réécrire la distance «  $d$  » en fonction des paramètres  $(r_0, \varphi_0, r, \varphi)$  et faire apparaître l'écriture harmonique.

La formule d'Al-Kashi (théorème de Pythagore généralisé) donne la relation suivante.

$$d^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 \quad (\text{III.13})$$

La mise en facteur du terme «  $r^2$  » permet la réécriture du potentiel vecteur «  $\mathbf{A}$  » (équation (III.12)) comme suit :

$$A_z = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(r) - \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 - 2 \cdot \frac{r_0}{r} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) \quad (\text{III.14})$$

**Remarque :** Cette écriture est valable partout sauf sur le point d'origine du repère (c'est-à-dire  $r=0$ ) ainsi que sur le conducteur (c'est-à-dire en  $(r_0, \varphi_0)$ ). Cependant, l'écriture classiquement connue autour d'un conducteur rectiligne (III.8) est retrouvée lorsque «  $r$  » devient très grand devant «  $r_0$  ». Cette écriture adresse donc la zone d'étude externe qui entoure la source (c'est-à-dire  $r > r_0$ ).

On sait que le potentiel vecteur est périodique selon la coordonnée «  $\varphi$  ». Il peut ainsi être décomposé en une somme de termes périodiques (cosinus et/ou sinus). La référence [KERADEC 91] démontre alors que le second terme de (III.14) est décomposable en polynômes de Tchebychev et conduit à l'écriture du potentiel que nous noterons «  $A_{\text{ext}}$  » ci-dessous :

$$A_{\text{ext}} = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(r) - \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \quad (\text{III.15})$$

**Remarque :** Le polynôme de Tchebychev utilisé ici ne converge que si le terme  $(r_0/r) < 1$ , ce qui est le cas pour la zone externe entourant le conducteur considéré (voir la Figure III.1).

La décomposition du terme périodique permet une dernière réécriture du potentiel vecteur (équation (III.16)) et par identification avec l'écriture générale (équation (III.11)), l'écriture des coefficients harmoniques  $(\alpha_n, \beta_n)$  est obtenue.

$$A_{\text{ext}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot A_0 \cdot \ln(r) + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r^{-n} \cdot \cos(n\varphi) + \beta_n \cdot r^{-n} \cdot \sin(n\varphi) \quad (\text{III.16})$$

$$A_0 = I_0 \quad (\text{III.17})$$

$$\alpha_n = \frac{I_0 \cdot r_0^n}{n} \cos(n\varphi_0) \quad (\text{III.18})$$

$$\beta_n = \frac{I_0 \cdot r_0^n}{n} \sin(n\varphi_0) \quad (\text{III.19})$$

### Le problème interne

Reprenons le même principe de calcul de la distance « d » mais avec la mise en facteur du terme «  $r_0^2$  » pour conduire à l'expression suivante du potentiel vecteur.

$$A_z = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(r_0) - \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 - 2 \cdot \frac{r}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) \quad (\text{III.20})$$

**Remarque :** Cette écriture n'est toujours pas valable sur le conducteur (c'est-à-dire aux coordonnées  $(r_0, \varphi_0)$ ). Cette écriture étant définie à l'origine du repère (c'est-à-dire en  $r=0$ ), elle adresse la zone d'étude interne entourée par les sources ( $r < r_0$ ).

Par analogie avec le problème externe, cette expression s'identifie également avec les polynômes de Tchebychev pour écrire le potentiel que nous noterons «  $A_{\text{int}}$  » ci-dessous :

$$A_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \ln(r_0) + \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \quad (\text{III.21})$$

**Remarque :** Le polynôme de Tchebychev utilisé ici ne converge que si le terme  $(r/r_0) < 1$ , ce qui est le cas pour un point « M » dans la zone interne comprise entre la source et le centre du repère (voir la Figure III.1). On observe également l'expression du terme constant noté  $B_0$  dans la solution générale (III.11) : celui-ci n'est cependant pas source d'induction magnétique.

La décomposition du terme périodique permet encore une réécriture du potentiel vecteur (équation(III.22)) et par identification avec l'écriture générale (équation (III.11)), l'expression des coefficients harmoniques( $a_n, b_n$ ) est obtenue.

$$A_{\text{int}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} B_0 + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot r^n \cdot \cos(n\varphi) + b_n \cdot r^n \cdot \sin(n\varphi) \quad (\text{III.22})$$

$$B_0 = I_0 \cdot \ln(r_0) \quad (\text{III.23})$$

$$a_n = \frac{I_0 \cdot r_0^{-n}}{n} \cos(n\varphi_0) \quad (\text{III.24})$$

$$b_n = \frac{I_0 \cdot r_0^{-n}}{n} \sin(n\varphi_0) \quad (\text{III.25})$$

### Analyse des écritures mathématiques

On remarque que les deux écritures présentées «  $A_{\text{ext}}$  » (III.16) et «  $A_{\text{int}}$  » (III.22) font intervenir une somme infinie de fonctions périodiques. Le premier terme périodique correspond à un dipôle ( $n = 1$ ), le second à un quadripôle ( $n = 2$ ) et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Lorsqu'on observe une source de suffisamment loin, seulement certains termes de la décomposition sont non négligeables et un comportement dipolaire est souvent mesurable. La distance permettant le filtrage naturel des termes multipolaires d'ordre élevé, la somme (III.16) ou (III.22) peut être approchée par une somme finie. Ce résultat a déjà été mis en évidence dans plusieurs travaux [LEGRIS 96], [VINCENT 09].

Ces travaux étant en problème externe, on sait donc que la série «  $A_{\text{ext}}$  » ne nécessite en pratique qu'un nombre fini de termes grâce à la décroissance en «  $1/r^n$  » sur l'intervalle  $[r_0 ; +\infty[$ , «  $r_0$  » définissant la position de la source. Rappelons néanmoins que nos travaux se placent en problème interne et on sait déjà que la série «  $A_{\text{int}}$  » converge (équation (III.21)). [SCHMERBER 06] en a déjà discuté mais même si l'éloignement du point d'observation à la source reste limité en problème interne, lorsque «  $r \rightarrow \infty$  », la somme (III.22) peut aussi être approchée par un nombre limité de termes.

### III.2.3. Etude du champ en problème interne

#### Définition et illustration

A partir de la configuration générale de la source présentée Figure III.1, nous définissons les paramètres  $I_0 = 10 \text{ A}$ ,  $r_0 = 0,9 \text{ m}$  et  $\varphi_0 = 180^\circ$ . Dans ces conditions, le problème interne se limite au cercle centré sur l'origine du repère et de rayon maximal  $r_{\text{max}} < r_0$  (cercle noir sur la Figure III.2).

Nous souhaitons illustrer la validité de la troncature de l'écriture harmonique de ce problème interne à travers l'étude de la répartition du champ magnétique calculé le long d'un cercle centré sur le repère et de rayon  $r_M = 0,4 \text{ m}$  (cercle bleu sur la Figure III.2).

On sait que l'induction magnétique décrit des iso-valeurs circulaires centrées sur le conducteur (cercles vert sur la Figure III.2). Cependant, l'étude étant faite le long d'un cercle décentré par rapport au conducteur, le module n'y est ni constant ni tangent : en attestent les vecteurs rouge de la Figure III.2. Ceci illustre l'apparition des fonctions harmoniques pour la description du champ lorsque le repère d'étude n'est pas centré sur le conducteur. Pour ce cas très simple, c'est le décentrage choisi qui rend l'écriture du champ plus complexe.

La Figure III.3 présente le résultat du calcul exact des composantes, radiale et ortho-radiale, de l'induction le long du cercle d'étude (cercle bleu). On souhaite montrer dans le paragraphe suivant que l'écriture harmonique tend vers ce résultat en mettant en jeu un nombre fini de termes.



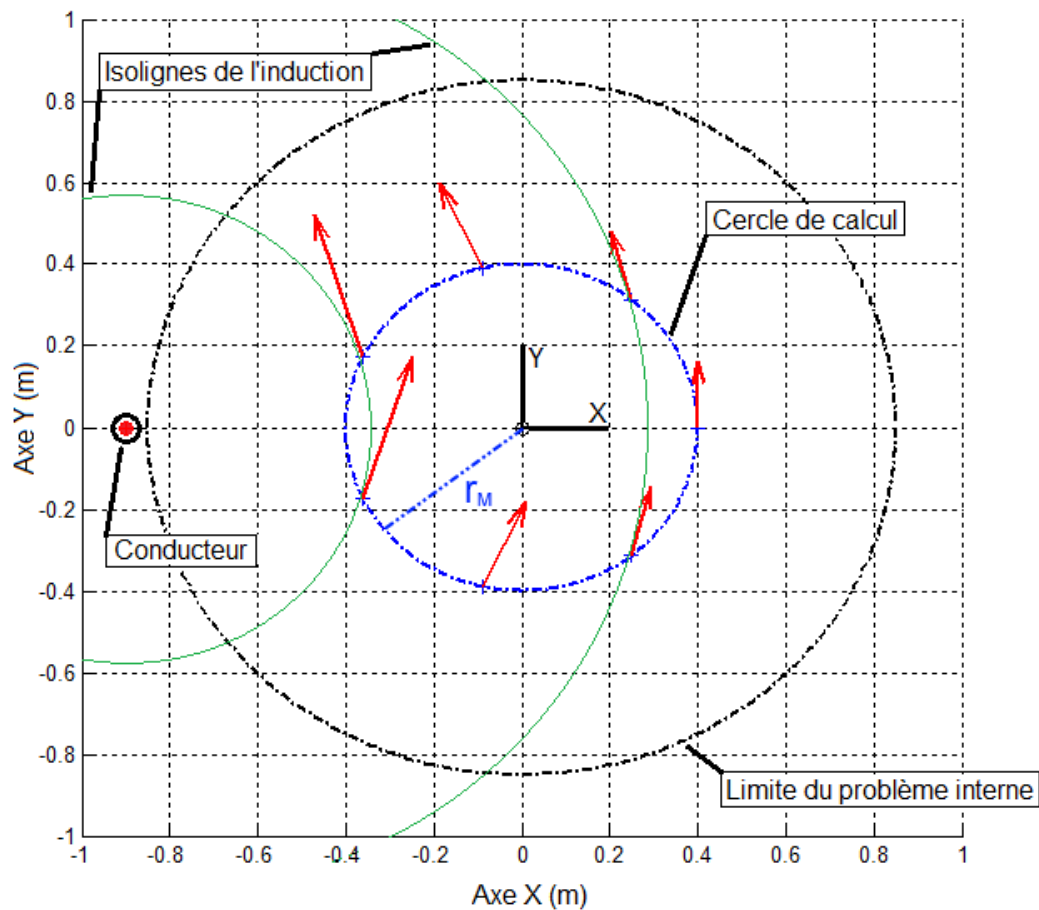


Figure III.2 : Illustration du cas école étudié et du module de l'induction en quelques points

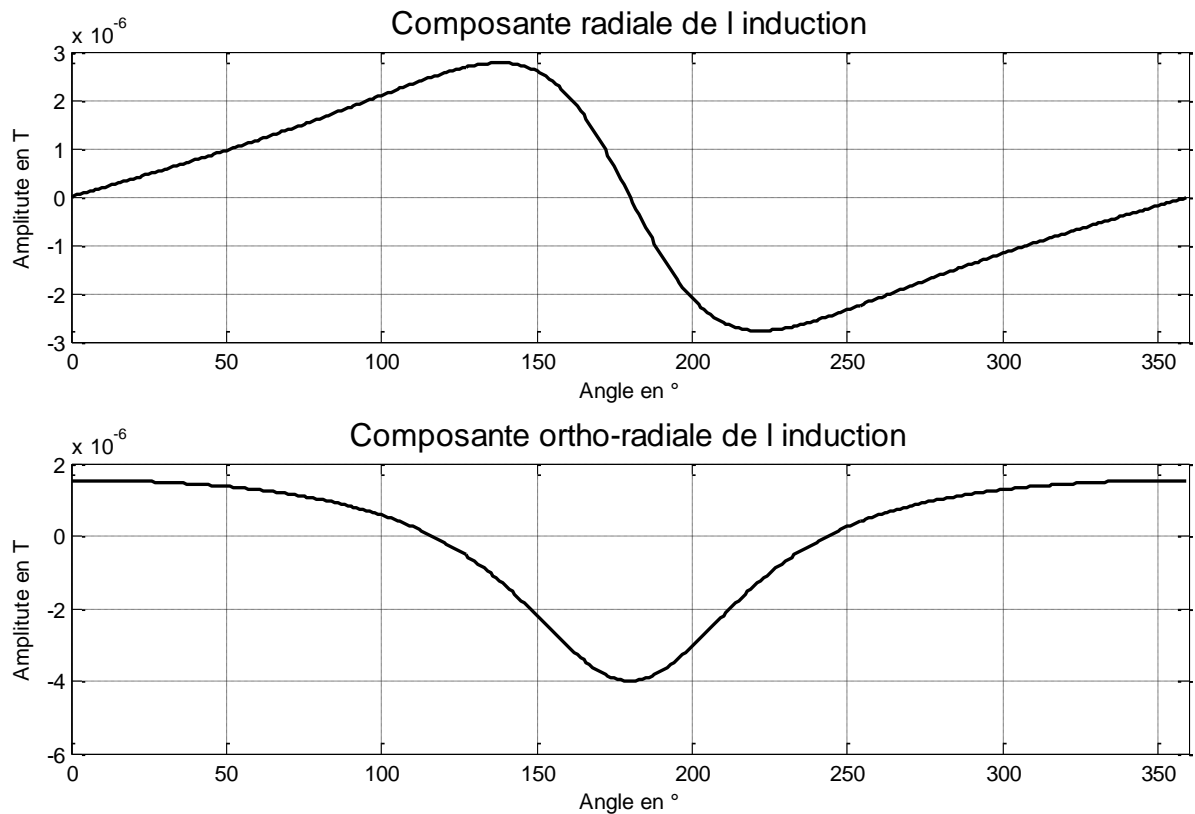


Figure III.3 : Composante radiale et ortho-radiale de l'induction en problème interne sur le cercle de rayon  $r=0,4m$

### Troncature de la série harmonique

L'expression harmonique des composantes radiale et ortho-radiale de l'induction magnétique en problème interne s'obtient par le calcul du rotationnel en coordonnées cylindriques du potentiel vecteur «  $A_{int}$  » :

$$Br_{hs\_int} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^{n-1} [a_n \sin(n\varphi) - b_n \cos(n\varphi)] \quad (\text{III.26})$$

$$B\varphi_{hs\_int} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^{n-1} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] \quad (\text{III.27})$$

L'expression des coefficients harmoniques «  $a_n$  » et «  $b_n$  » est respectivement donnée par (III.24) et (III.25). Le Tableau III.1 (ci-dessous) présente les valeurs de ces coefficients harmoniques lorsque  $I_0 = 10$  A,  $r_0 = 0.9$  m,  $\varphi_0 = 180^\circ$  et l'ordre  $n = [0 ; 6]$ .

Compte tenu des expressions, le coefficient «  $a_n$  » ne dépend que des paramètres «  $I_0$  », «  $r_0$  » et «  $n$  », tandis que le coefficient «  $b_n$  » est toujours nul.

Afin d'illustrer que les harmoniques d'ordre élevé sont naturellement filtrées, chaque coefficient est ensuite pondéré par le terme «  $n \cdot r^{n-1}$  » lorsque l'on souhaite approximer l'induction magnétique en problème interne le long du cercle centré sur le repère d'étude et de rayon  $r = 0,4$  m (voir la Figure III.2).

Ordre « $n$ »	1	2	3	4	5	6
$a_n$	-11,111	6,173	-4,572	3,811	-3,387	3,136
$(n \cdot r^{n-1}) \cdot a_n$	-11,111	4,938	-2,195	0,975	-0,434	0,193
$b_n$	0	0	0	0	0	0
$(n \cdot r^{n-1}) \cdot b_n$	0	0	0	0	0	0

Tableau III.1 : Valeurs des coefficients harmoniques lorsque  $I_0=10$ A,  $r_0=0.9$ m,  $\varphi_0=180^\circ$  et pondération lorsque  $r=0,4$ m

On note en effet que la contribution de l'ordre 6 ne représente plus que deux centièmes de variation d'amplitude par comparaison à la contribution de l'ordre 1.

Cette observation confirme la possibilité de tronquer la série harmonique en un nombre fini de termes puisque pour une source donnée et un rayon d'observation «  $r$  » donné, les ordres de plus en plus élevés auront une influence de moins en moins importante sur le champ.

La troncature consiste donc à approximer le signal avec un certain de niveau de précision que l'on souhaite avoir.

La Figure III.4 présente la composante radiale de l'induction magnétique en problème interne. Le calcul exact est comparé au calcul approché par la série harmonique lorsque celle-ci est tronquée soit à l'ordre 2, 3 ou 4.

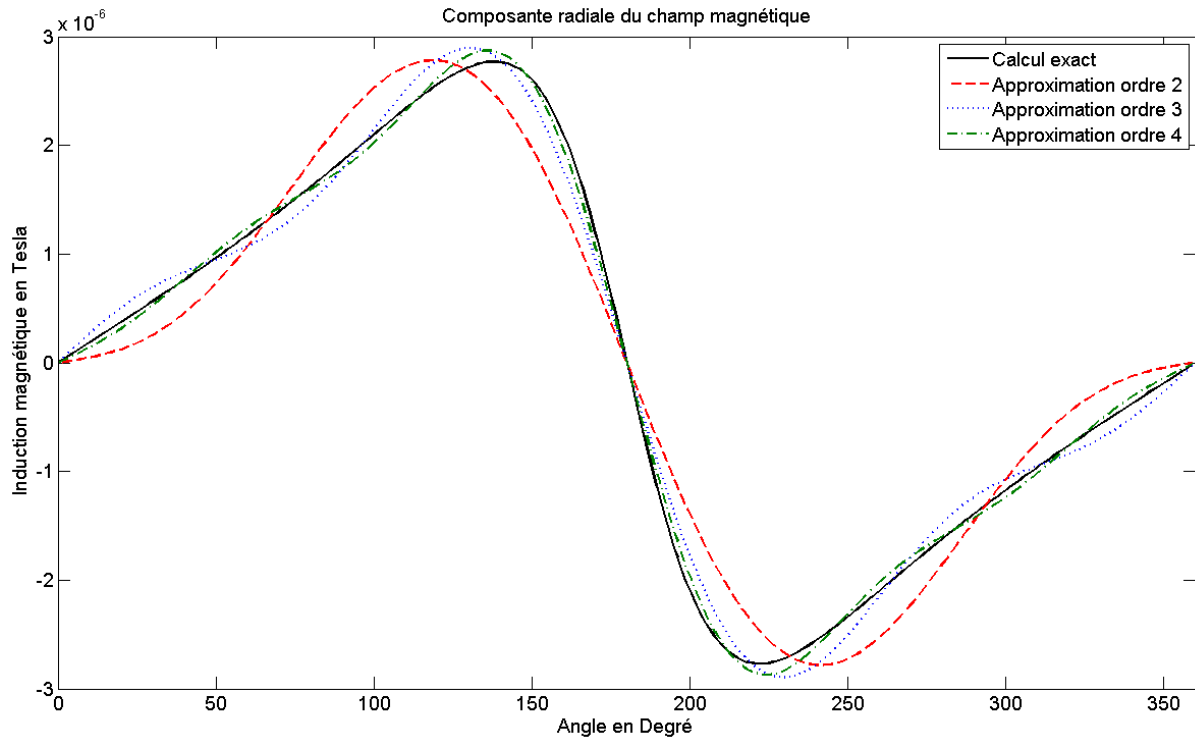


Figure III.4 : Composante radiale du champ magnétique calculée sur le cercle d'étude de rayon  $r=0,4\text{m}$  en problème interne

On constate en effet que plus l'ordre de la série harmonique est important, plus le signal correspondant est proche de la valeur exacte. Afin d'être plus objectif dans l'analyse, nous mettons en place un critère chiffré (III.28) qui est le résultat de l'intégrale de l'écart quadratique entre le signal tronqué «  $S_{hs}(r, \varphi)$  » et le signal exact de référence «  $S_{ref}(r, \varphi)$  », mis en comparaison avec l'intégrale du carré du signal exact.

$$Ecart = 100 * \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (S_{hs}(r, \varphi) - S_{ref}(r, \varphi))^2 d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (S_{ref}(r, \varphi))^2 d\varphi} \quad (\text{III.28})$$

Le Tableau III.2 indique la valeur de cet écart pour la composante radiale et ortho-radiale de l'induction magnétique en fonction de l'ordre maximum de l'approximation harmonique.

On constate de la même manière que plus la décomposition harmonique est d'ordre élevé plus l'approximation s'approche du signal exact. Par exemple, l'écart sur le module du signal à l'ordre 4 est inférieur à 0,15 % et diminue encore pour être inférieur à 0,06 % à l'ordre 6.

Ordre maximum	1	2	3	4	5	6
Ecart en % sur $B_r$	17,449	3,003	0,562	0,109	0,021	0,004
Ecart en % sur $B_\varphi$	15,422	2,651	0,499	0,097	0,019	0,004

Tableau III.2 : Ecart entre l'approximation harmonique et le calcul exact des composantes du champ calculées sur le cercle de rayon  $r=0,4\text{m}$  en problème interne

Grâce à l'étude de ce cas purement pédagogique en deux dimensions, l'écriture harmonique du champ a pu être prise en main et sa convergence pour un problème interne illustrée.

On s'aperçoit que c'est une approche purement mathématique mais elle s'avère très utile pour notre problématique. En effet, nous souhaitons étudier le champ à l'intérieur d'une zone entourée de plusieurs sources. Dans ce contexte, il est clairement impossible de centrer le repère d'étude sur la source de champ qui est en réalité répartie et l'écriture harmonique semble toute indiquée.

Cependant l'objectif qui nous anime est clairement en trois dimensions et le paragraphe suivant a pour but de présenter l'écriture en coordonnées sphériques.

### III.3. Développement multipolaire 3D

Compte tenu de l'équivalence existant entre l'utilisation du potentiel vecteur ou du potentiel scalaire, nous nous concentrons sur ce second car il est plus simple de calculer un gradient plutôt qu'un rotationnel pour obtenir l'induction magnétique.

#### III.3.1. Potentiel scalaire et induction magnétique

##### Forme générale du potentiel scalaire

Ce potentiel est obtenu à partir de l'équation de Laplace (III.7) dont la résolution en coordonnées sphériques [DURAND 66], [ANGOT 72], [LEGRIS 96], [SCHMERBER 06] fait apparaître les fonctions harmoniques sphériques d'ordre « n » et de degré « m ».

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \left( a_{n,m} \cdot r^n + \frac{b_{n,m}}{r^{n+1}} \right) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \right] \quad (\text{III.29})$$

On retrouve la double écriture faisant intervenir soit les coefficients harmoniques en problème interne «  $a_{n,m}$  » (zone entourée par toutes les sources), soit les coefficients harmoniques en problème externe «  $b_{n,m}$  » (zone entourant toutes les sources).

Rappelons alors que ces coefficients harmoniques ne dépendent que des sources de champs.

##### Définition des fonctions harmoniques sphériques

Les fonctions harmoniques sphériques sont représentées par le terme  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ . Elles mettent en jeu les paramètres  $(\theta, \varphi)$  du repère sphérique et sont définies comme suit [ROBIN 57], [LEGRIS 96] :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!}} \cdot P_n^{|m|}(\cos(\theta)) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos(|m| \cdot \varphi) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin(|m| \cdot \varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Le terme  $P_n^{|m|}(\cos(\theta))$  représente les polynômes de Legendre associés<sup>7</sup> d'ordre « n » et du degré « m ».

La Figure III.5 (ci-dessous) rappelle la définition du repère sphérique. Ainsi l'angle polaire  $\theta = [0; 180^\circ]$  et l'angle azimutal  $\varphi = [0; 360^\circ]$ .

<sup>7</sup> On pourra se reporter à l'annexe A pour la définition des polynômes de Legendre et à l'annexe B pour la définition des polynômes de Legendre associés.

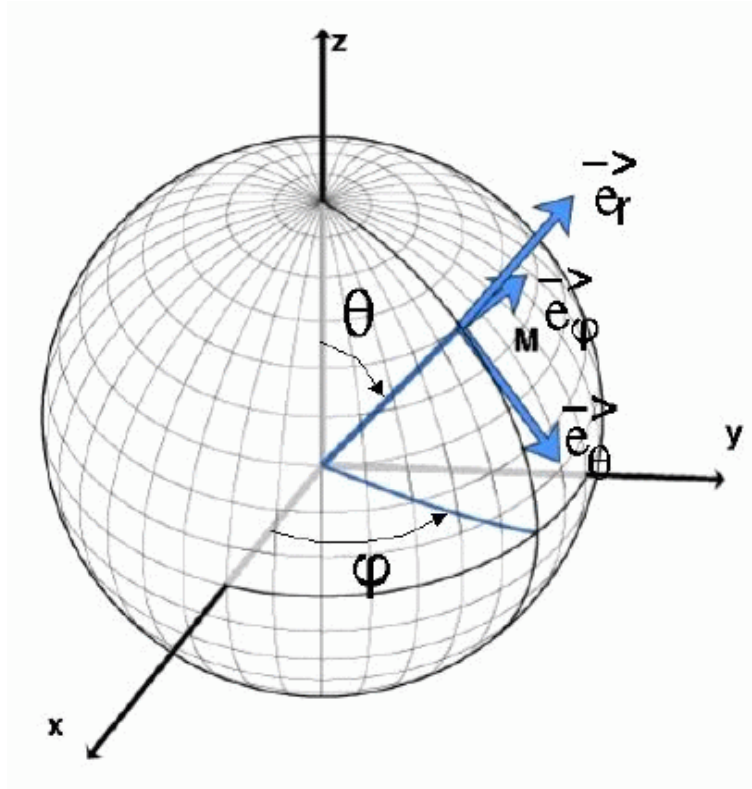


Figure III.5 : Représentation des coordonnées du repère sphérique

### Induction magnétique en problème interne

L'induction magnétique s'obtient par le simple calcul du gradient du potentiel scalaire.

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\mu_0 \cdot \mathbf{grad}(\psi(r, \theta, \varphi)) \quad (\text{III.31})$$

Soit l'expression des composantes de l'induction en problème interne :

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^n \cdot Y_n^m(\theta, \varphi)) \cdot \mathbf{e}_r \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (r^n \cdot Y_n^m(\theta, \varphi)) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^n \cdot Y_n^m(\theta, \varphi)) \cdot \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

### Écriture matricielle

L'écriture (III.32) peut être réécrite comme ci-dessous et met clairement en évidence la relation linéaire entre les coefficients harmoniques «  $a_{n,m}$  » et les composantes de l'induction au point « P » de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ .

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot U_{n,m}(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{e}_r \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot V_{n,m}(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot W_{n,m}(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

On sait de plus que la série harmonique peut être tronquée à l'ordre  $n = N$  définissant ainsi le nombre de termes nécessaire ( $N^2 + 2N$ ) pour l'écriture de l'induction. Nous pouvons alors écrire ce système linéaire en «  $k$  » différents points (de mesure ou de simulation), ce qui conduit à l'écriture matricielle suivante :

$$A \cdot X = B \quad (\text{III.34})$$

Soit plus explicitement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{1,0}(P_1) & U_{1,1}(P_1) & U_{1,-1}(P_1) & \dots & U_{N,-N}(P_1) \\ V_{1,0}(P_1) & V_{1,1}(P_1) & \cdot & \dots & \cdot \\ W_{1,0}(P_1) & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1,0}(P_k) & W_{1,1}(P_k) & W_{1,-1}(P_k) & \dots & W_{N,-N}(P_k) \end{bmatrix}}_{A\{3k \times (N^2 + 2N)\}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,-1} \\ \vdots \\ a_{N,-N} \end{bmatrix}}_{X\{(N^2 + 2N) \times 1\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_r(P_1) \\ B_\theta(P_1) \\ B_\varphi(P_1) \\ \vdots \\ B_\varphi(P_k) \end{bmatrix}}_{B\{3k \times 1\}} \quad (\text{III.35})$$

Cette écriture matricielle sera étudiée plus en détail dans le chapitre suivant.

### III.3.2. Projection sur les fonctions harmoniques sphériques

On imagine aisément que l'expression analytique des coefficients harmoniques liés aux sources en trois dimensions est bien plus complexe. Cependant notre objectif n'est pas l'explicitation formelle de ces coefficients mais plutôt leur identification qui permettra ensuite l'étude du champ à l'intérieur d'une zone.

Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir leur valeur sans connaître leur expression littérale.

Les fonctions harmoniques sphériques forment une base orthogonale : la preuve peut en être apportée par le calcul du produit scalaire noté  $\langle a, b \rangle$ . Cette propriété conduit par ailleurs au résultat de calcul <sup>8</sup> (équation (III.36)) lorsque ce produit scalaire met en jeu deux fonctions harmoniques identiques [LEGRIS 96].

<sup>8</sup> On pourra se reporter à l'annexe C pour quelques détails de calcul.

$$\langle Y_{n1}^{m1}, Y_{n2}^{m2} \rangle = \begin{cases} \frac{4\pi}{2n+1} \text{ lorsque } \begin{cases} n = n1 = n2 \\ m = m1 = m2 \end{cases} \\ 0 \text{ lorsque } \begin{cases} n1 \neq n2 \\ m1 \neq m2 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

On aperçoit l'intérêt de ce résultat en réétudiant l'écriture harmonique du champ (équation (III.32)) et en définissant le produit scalaire suivant :

$$I_{n_0, m_0} = \langle B_r, Y_{n_0}^{m_0} \rangle = \oint\!\!\!\oint B_r(r, \theta, \varphi) \cdot Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) \cdot ds \quad (\text{III.37})$$

Où «  $B_r$  » est la composante radiale de l'induction magnétique :

$$B_r(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{III.38})$$

Ce produit scalaire, calculé par l'intégrale sur la sphère représente la projection de la composante radiale de l'induction magnétique sur la fonction harmonique d'ordre «  $n_0$  » et de degré «  $m_0$  » : ( $Y_{n_0}^{m_0}$ ).

A partir de l'écriture harmonique de la composante radiale (présentée équation (III.32)) et du résultat énoncé plus tôt, ce produit scalaire conduit à l'évaluation du coefficient harmonique «  $a_{n_0, m_0}$  ».

$$I_{n_0, m_0} = \langle B_r, Y_{n_0}^{m_0} \rangle = -\mu_0 \cdot a_{n_0, m_0} \cdot \frac{n_0}{2n_0 + 1} \cdot r^{n_0+1} \quad (\text{III.39})$$

Imaginons que l'on possède une écriture analytique de la composante radiale du champ en chaque point de coordonnées ( $r, \theta, \varphi$ ), qui dépend des paramètres physiques et géométriques des sources : c'est-à-dire plusieurs milliers. On aperçoit l'intérêt de ce calcul pour convertir cette écriture au formalisme des harmoniques sphériques et ainsi réduire le nombre de paramètres : passage des paramètres physiques aux coefficients harmoniques.

### III.3.3. Application au modèle direct développé

Rappelons que l'on souhaite évaluer le champ magnétique partout à l'intérieur de l'habitacle. On propose donc l'identification d'un jeu de coefficients, ici harmoniques, afin de pouvoir décrire ce champ magnétique partout.

Or l'écriture harmonique sphérique, comme son nom l'indique, met en jeu des sphères pour l'étude du champ à l'intérieur de celles-ci. La zone d'étude ne pouvant contenir aucune source, il paraît difficile de définir une seule et unique sphère pour tout l'habitacle.

Nous avons certes montré que tous les équipements embarqués se trouvent en dessous du châssis et à l'intérieur du compartiment moteur, mais les pièces en acier (châssis, carrosserie, armature des sièges, etc.) réagissent au champ magnétique en s'aimantant. En conséquence,



ces pièces peuvent être vues comme des sources et ne peuvent se trouver à l'intérieur de la sphère d'étude. Il est alors nécessaire de définir plusieurs sphères d'étude dont l'union conduira à la description de la majorité du volume de l'habitacle. La Figure III 6 présente un exemple de répartition de sphères d'étude à l'intérieur de l'habitacle, chacune ne contenant aucune source.

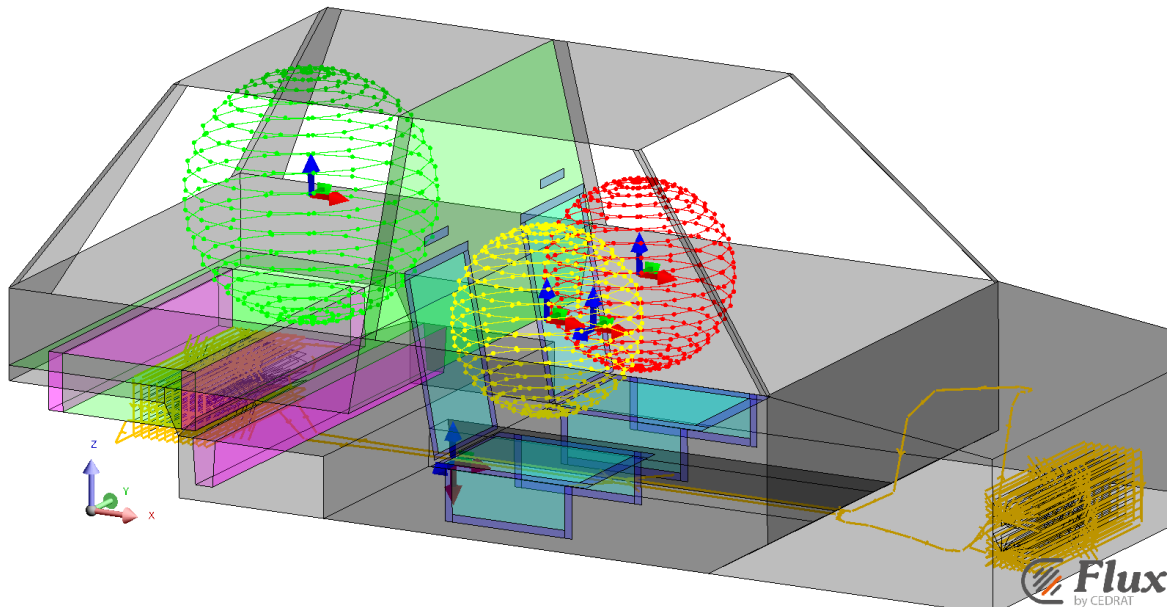


Figure III 6 : Exemple de répartition de sphère d'étude en problème interne sur le modèle complet développé

Notons que chaque sphère représente alors un problème interne différent à étudier car c'est le centre de ces dernières qui définit l'écriture harmonique.

La méthode d'évaluation reste cependant la même quelle que soit la sphère d'étude et nous ne nous concentrerons donc que sur l'une d'entre elle : la sphère jaune de rayon  $r = 0,35$  m par exemple (zone correspondant au passager avant du véhicule).

### Evaluation des coefficients harmoniques

Afin d'illustrer l'évaluation des coefficients harmoniques, nous nous concentrons sur la sphère présentée ci-dessous lorsque seul le circuit électrique de puissance est présent (aucun élément ferromagnétique, Figure III.7).

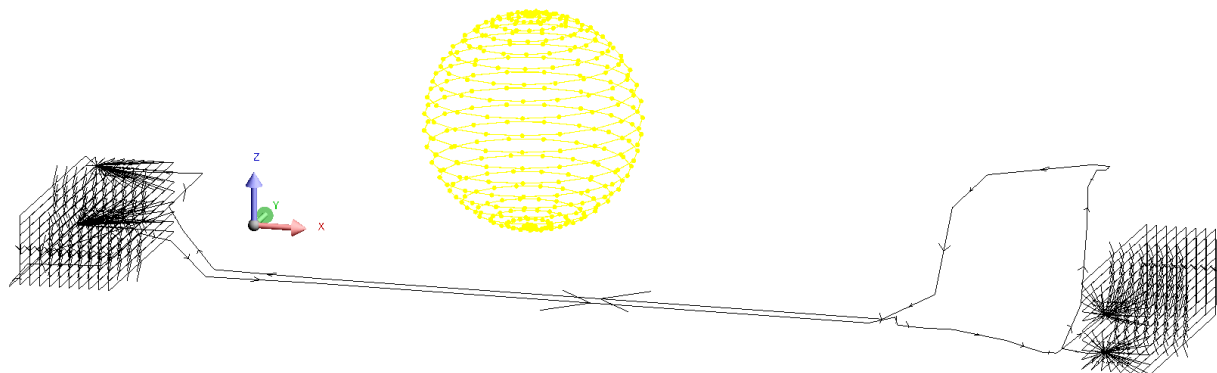


Figure III.7 : Sphère d'évaluation des coefficients harmoniques

Nous mettons en œuvre l'évaluation des coefficients harmoniques sphériques grâce à l'expression (III.37). Bien sûr, nous n'avons pas d'expression analytique de la composante radiale du champ mais nous sommes capables de la calculer en tout point grâce aux méthodes numériques présentées dans le chapitre précédent.

On définit alors un réseau régulier d'éléments surfaciques (surface élémentaire constante) sur la surface de la sphère : éléments sur lesquels on calcule la composante radiale moyenne du champ. Chaque résultat est ensuite pondéré par la fonction harmonique sphérique d'ordre «  $n_0$  » et de degré «  $m_0$  » évaluée aux coordonnées  $(\theta, \varphi)$  du point au centre de l'élément surfacique. La somme conduit alors à l'évaluation du coefficient harmonique «  $a_{n_0, m_0}$  » (équation (III.39)).

La Figure III.8 représente jusqu'à l'ordre 4, la valeur des coefficients harmoniques permettant la description de l'induction magnétique. La Figure III 9 représente la valeur pondérée par le terme «  $r^{n-1}$  » lorsque  $r = 0,30$  m pour évaluer l'influence de chacun des coefficients sur l'induction magnétique à la surface de la sphère.

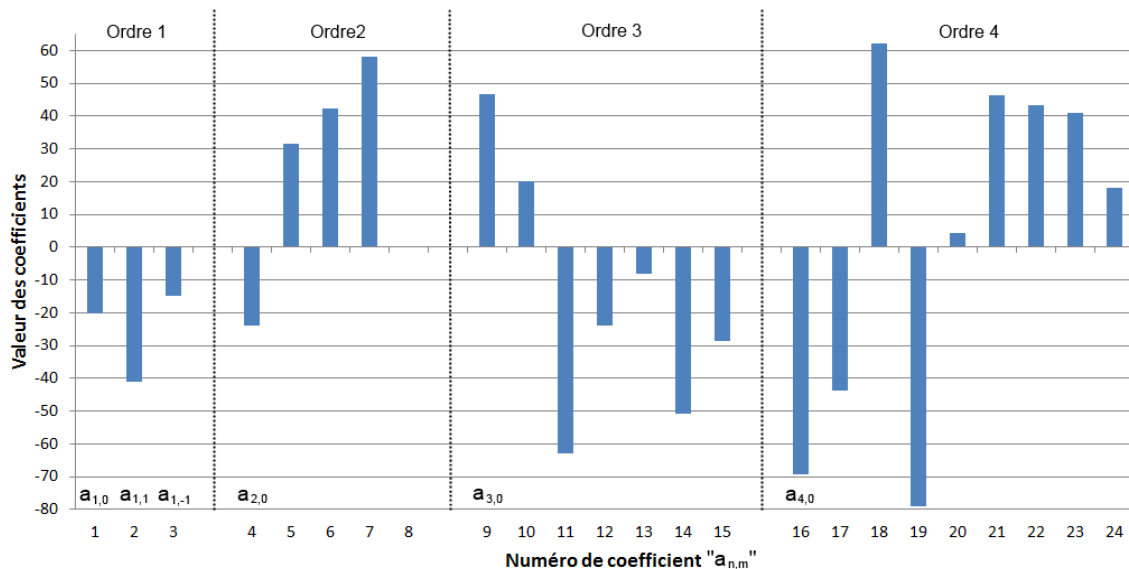


Figure III.8 : Valeurs des coefficients harmoniques du problème interne présenté (sphère jaune) lorsque seule les boucle de puissance sont présentes

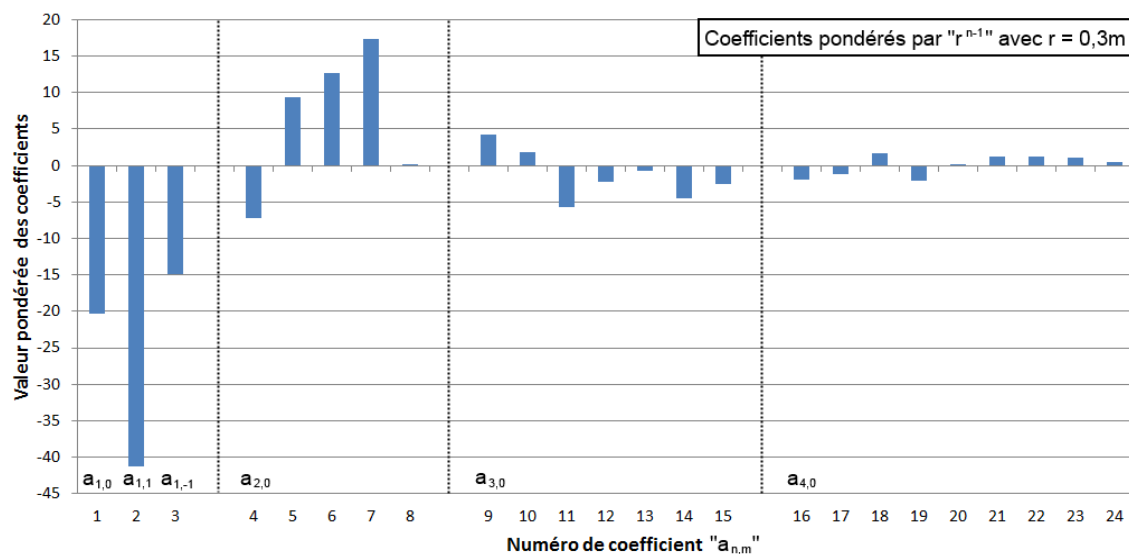


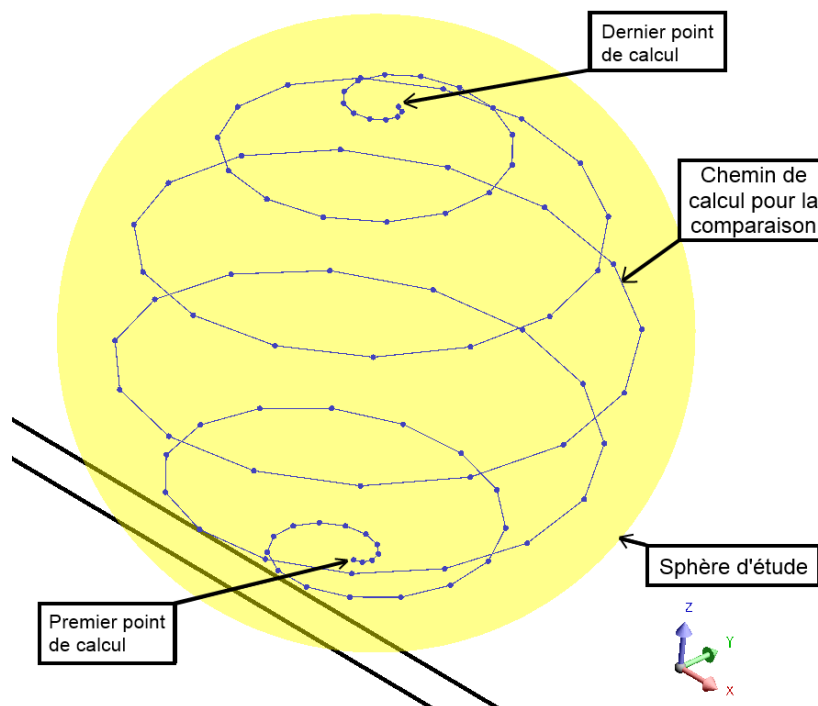
Figure III 9 : Valeurs pondérées par  $r^{n-1}$  ( $r=0,3m$ ) des coefficients harmoniques du problème interne présenté lorsque seule les boucles de puissance sont présentes

Comme pour l'illustration en deux dimensions, on observe que pour une source donnée et un rayon d'étude (en problème interne ici), la contribution des harmoniques d'ordre élevés est naturellement atténuée. Ces dernières peuvent alors être négligées en fonction de la précision souhaitée pour l'approximation harmonique.

### *Approximation harmonique du champ à l'intérieur de la sphère*

La seule source de champ est la répartition des boucles de courant électrique. L'induction magnétique est donc calculée analytiquement par la loi de Biot et Savart. Les coefficients harmoniques précédemment évalués permettent le calcul de l'approximation à un ordre «  $n$  » maximal (équation (III.32)) que nous comparons à la valeur exacte.

Cette comparaison s'effectue sur une série de points placés sur la surface d'une sphère inscrite à l'intérieur de la sphère jaune présentée plus tôt (de rayon  $r = 0,35$  m). Ces points forment un chemin de calcul en spirale partant du bas vers le haut à l'intérieur de la sphère (voir la Figure III.10).



**Figure III.10 : Représentation du chemin de calcul pour la comparaison entre l'approximation harmonique et le calcul exact du champ**

Rappelons que, plus l'approximation est calculée proche du centre d'écriture (le centre de la sphère) plus l'ordre de décomposition harmonique est faible. Ici, le chemin de calcul est sur la surface d'une sphère de rayon  $r = 0,30$  m et l'approximation harmonique nécessite a priori un ordre maximal  $n_{\max} > 4$  (Figure III 9) pour obtenir une assez bonne précision.

La Figure III.11 présente le module du champ en problème interne calculé sur ce chemin et compare le calcul exact (courbe noire) aux approximations à l'ordre 2 (courbe rouge), 3 (courbe bleue) et 4 (courbe verte). Comme pour l'étude en deux dimensions, on observe la convergence de l'approximation harmonique vers le calcul exact.

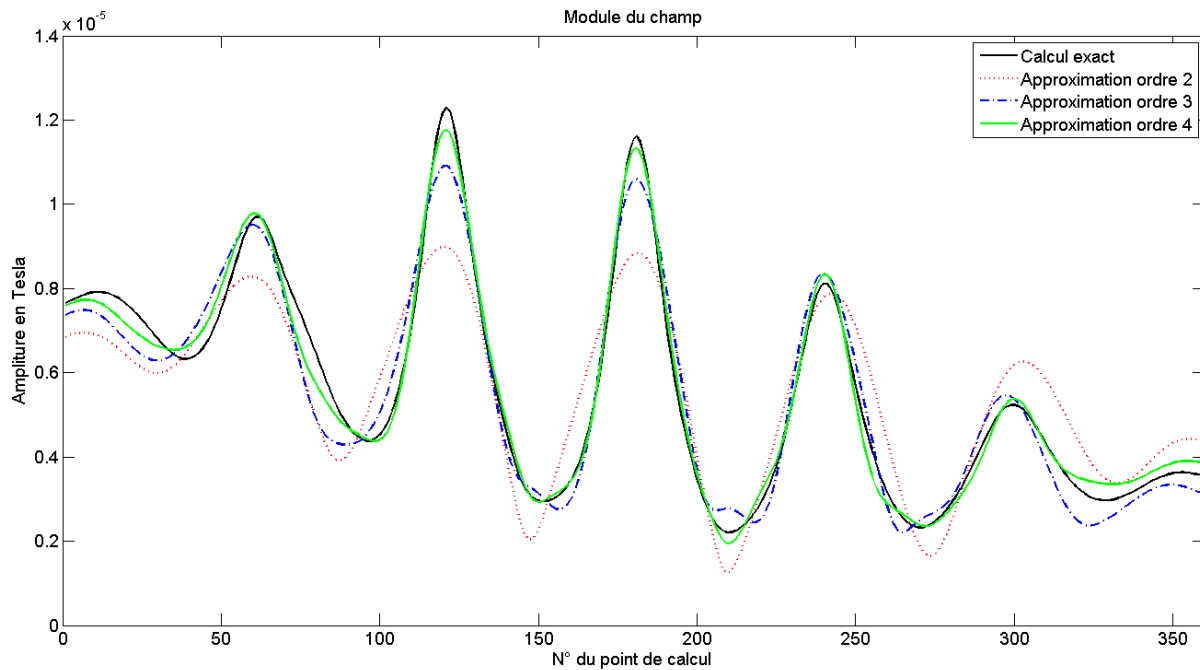


Figure III.11 : Module du champ calculé en problème interne sur le chemin paramétré

Le même indicateur chiffré (formule (III.28)) est ensuite mis en œuvre ici et résumé dans le Tableau III.3. Calculé pour chacune des composantes du champ, il permet de comparer les approximations aux résultats du calcul analytique et illustre la convergence de la série harmonique en un nombre fini de termes.

Ordre maximum	1	2	3	4	5
Ecart en % sur $B_r$	53,037	14,826	3,867	1,053	0,236
Ecart en % sur $B_\theta$	40,039	10,808	2,450	0,582	0,227
Ecart en % sur $B_\phi$	34,099	6,315	1,377	0,285	0,054

Tableau III.3 : Ecart entre l'approximation harmonique tronquée à un ordre maximal donné et le résultat exact des composantes du champ calculé sur le chemin paramétré à l'intérieur de la sphère d'étude

L'écriture harmonique du champ permet d'obtenir un modèle compact. En effet grâce aux décroissances, cette écriture peut être tronquée en un nombre très limité de termes tout en limitant l'erreur commise par l'approximation.

Pour en prendre la mesure, l'induction magnétique sur la surface de la sphère de rayon  $r = 0,30$  m (chemin de calcul de la Figure III.10) peut être approximée à l'ordre 5 avec une erreur inférieure à 0,3 % sur toutes les composantes. Cette écriture ne nécessite que 35 coefficients harmoniques pour ce niveau de précision. En comparaison, l'inducteur électrique qui est la seule source dans le cas présenté, est décrit ici par environ 2000 paramètres (essentiellement les coordonnées géométriques). On aperçoit alors clairement la simplification de l'étude dont l'objectif est l'identification des paramètres.

### Ajout des pièces ferromagnétiques

Etudions maintenant l'approximation harmonique du champ lorsque les éléments ferromagnétiques sont également présent (Figure III 6). L'étude est toujours faite à l'intérieur de la sphère jaune (zone du passager) et les pièces ferromagnétiques ont été définies dans le chapitre précédent.

Dans les chapitres précédents, nous avons montré l'influence de ces éléments sur la répartition du champ à l'intérieur de l'habitacle. Que ce soit le champ magnétique terrestre ou le champ créé par les boucles de courant, la valeur du champ mesurée ou simulée à l'intérieur de l'habitacle est alors inférieure à celle de la source. Cela devrait donc se traduire de la même manière sur la répartition des coefficients harmoniques.

La Figure III.12 présente la répartition des coefficients harmoniques jusqu'à l'ordre 4. La répartition bleue rappelle les valeurs obtenues précédemment lorsque seules les boucles de courant sont présentes et la répartition rouge donne les valeurs obtenues ici avec le modèle complet intégrant les pièces ferromagnétiques.

La Figure III.13 représente ensuite jusqu'à l'ordre 4, pour le modèle complet avec les éléments ferromagnétiques, la valeur des coefficients harmoniques pondérée par le terme «  $r^{n-1}$  » lorsque  $r = 0,30$  m afin d'évaluer l'influence de chacun sur l'induction magnétique.

On retrouve bien-sûr la même conclusion concernant la contribution des harmoniques d'ordre élevés qui est naturellement atténuée. On note par ailleurs que pour la zone d'étude présentée, l'insertion des pièces ferromagnétiques ne semble pas modifier drastiquement l'ordre maximal de la décomposition harmonique pour atteindre le même degré de précision souhaité.

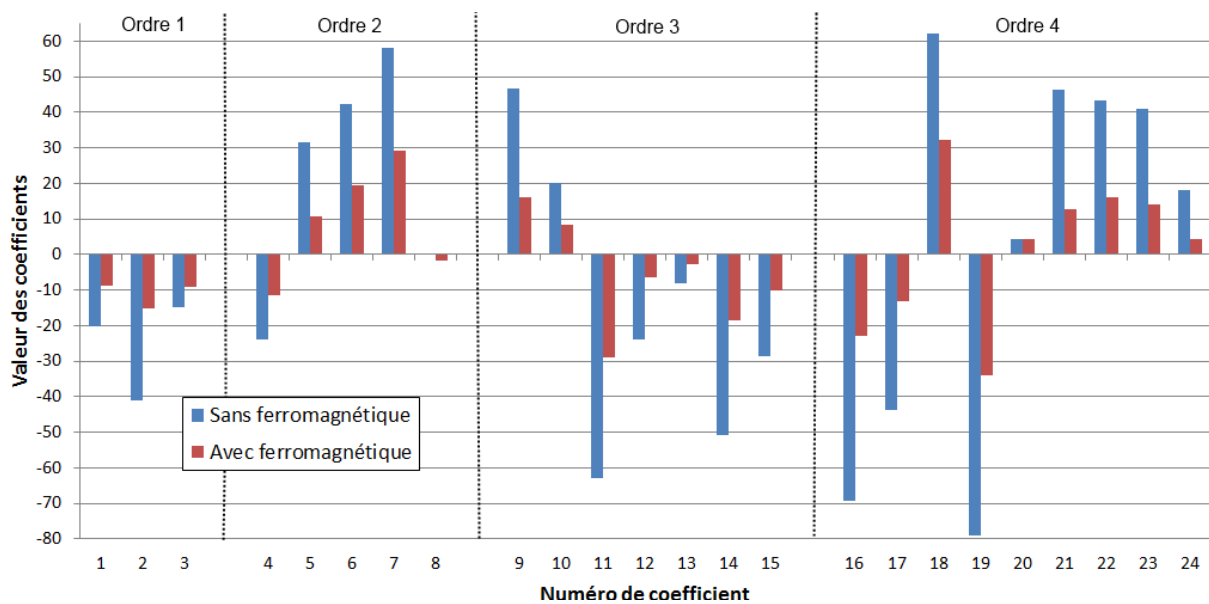


Figure III.12 : Valeurs des coefficients harmoniques du problème interne présenté (sphère jaune) : sans ferromagnétique (répartition bleue) et avec ferromagnétique (répartition rouge)

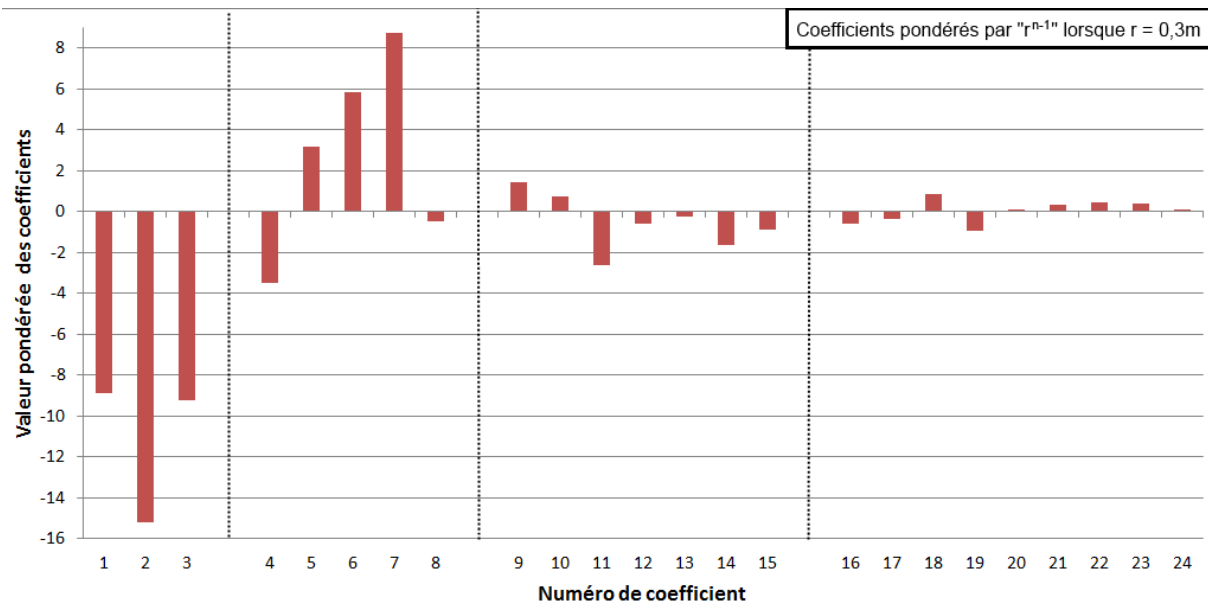


Figure III.13 : Valeurs pondérées par  $r^{n-1}$  ( $r=0,3\text{m}$ ) des coefficients harmoniques du problème interne présenté lorsque le modèle est complet (boucles de courant et pièces ferromagnétiques)

La Figure III.14 présente alors le module du champ en problème interne calculé sur le chemin paramétré (Figure III.10) lorsque le modèle étudié est complet (Figure III 6). Cette figure compare le calcul « exact », obtenu depuis le modèle complet (courbe noire), avec les approximations à l'ordre 2 (courbe rouge), 3 (courbe bleue) et 4 (courbe verte).

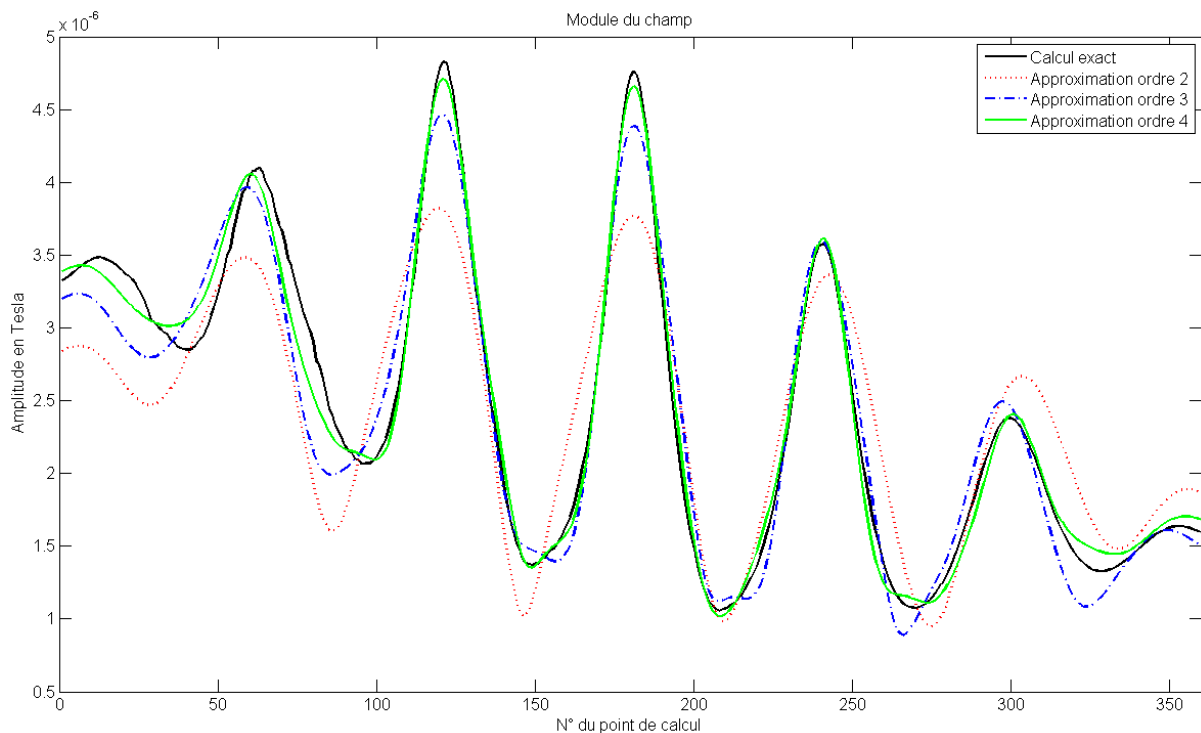


Figure III.14 : Module du champ calculé en problème interne sur le chemin paramétré pour le modèle complet

L'indicateur chiffré (formule (III.28)) est ensuite mis en œuvre pour chacune des composantes du champ et les résultats sont résumés dans le Tableau III.4.

Ordre maximum	1	2	3	4	5
Ecart en % sur $B_r$	55,927	12,770	3,706	1,152	0,354
Ecart en % sur $B_\theta$	42,912	9,969	2,364	0,513	0,116
Ecart en % sur $B_\phi$	38,968	5,571	1,201	0,225	0,061

**Tableau III.4 : Ecart entre l'approximation harmonique tronquée à un ordre maximal donné et le résultat exact des composantes du champ calculé sur le chemin paramétré à l'intérieur de la sphère d'étude pour le modèle complet intégrant les pièces ferromagnétiques**

Là encore, l'induction magnétique sur la surface de la sphère de rayon  $r = 0,30$  m (chemin de calcul de la Figure III.10) peut être approximée à l'ordre 5 avec une erreur maximale de l'ordre de 0,3 % sur toutes les composantes.

La simplification de l'étude est encore plus flagrante ici car nous avons déjà près de 2000 paramètres pour la description de l'inducteur électrique et l'insertion des pièces ferromagnétiques en ajoute plusieurs milliers. Lorsque notre objectif consistera à identifier les paramètres caractéristiques du champ magnétique grâce à des mesures, il est clair que le modèle harmonique est bien plus simple avec seulement 35 coefficients ici contre plusieurs milliers pour le modèle physique.

## Conclusions intermédiaires

Une écriture générale et compacte du champ dans l'air a été présentée. Fondée sur la décomposition en harmoniques sphériques, la décroissance des termes permet d'en limiter leur nombre. L'approximation obtenue conduit à une forte réduction du nombre de paramètres tout en gardant un niveau de précision compétitif.

En effet, pour la sphère étudiée ici, l'induction magnétique créée par l'inducteur électrique (décrit par environ 2000 paramètres) peut être écrite par les harmoniques sphériques avec seulement 35 termes (décomposition jusqu'à l'ordre 5). Ce résultat s'avère d'autant plus spectaculaire avec la prise en compte des pièces ferromagnétiques dont la description géométrique insère encore plusieurs milliers de paramètres.

Bien sûr cet ordre de décomposition harmonique dépend de la sphère d'étude : plus le rayon de celle-ci est important, plus l'ordre sera élevé. Selon la zone étudiée, le champ peut présenter de fortes variations spatiales et l'approximation harmonique associée nécessitera par conséquent plus de termes.

Néanmoins, le nombre de coefficients harmoniques restera toujours bien inférieur au nombre de paramètres physiques ou géométriques des sources. En effet, il faudrait avoir une écriture harmonique à l'ordre 30 pour commencer à atteindre le millier de paramètres et cette éventualité semble fortement improbable.

Grâce à cette écriture mathématique, nous proposons donc d'utiliser directement la mesure ponctuelle du champ magnétique pour identifier cette poignée de coefficients harmoniques. Il s'agit de résoudre un problème inverse linéaire et voici tout le sujet du chapitre suivant.





## Chapitre IV :

### Résolution du problème inverse par inférence Bayésienne

---



## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une écriture générale et compacte du champ grâce à une approximation utilisant un nombre limité de fonctions harmoniques sphériques. Tout l'enjeu consiste maintenant à identifier la valeur des coefficients harmoniques afin de pouvoir évaluer le champ partout à l'intérieur d'une zone. On propose de réaliser cette identification à partir de mesures : il s'agit de la résolution d'un problème inverse à savoir la détermination des causes (les sources équivalentes aux coefficients harmoniques) en fonctions des effets (le champ magnétique produit).

Le problème inverse n'est en réalité qu'une représentation mathématique de ce que tout expérimentateur réalise de manière naturelle. Depuis tout temps, le scientifique observe les effets et tente de les expliquer par des modèles paramétrés. Dans notre cas, le modèle paramétré est l'écriture harmonique dont nous voulons évaluer les paramètres (les coefficients harmoniques) grâce à la mesure du champ. Notre problème inverse est linéaire et consiste donc à résoudre le système reliant les paramètres du modèle aux observations du champ.

L'identification des paramètres d'un modèle uniquement par la mesure n'est possible que si la qualité et la quantité d'informations observables (mesurables) est suffisante. Or le plus souvent, la quantité n'est pas suffisante et le problème inverse ne peut être résolu de manière unique. A cela s'ajoute le bruit de mesure qui réduit encore le volume d'informations utilisable. Il semble alors absolument nécessaire d'apporter de l'information par un autre moyen que la mesure. Toute la démarche de modélisation menée jusqu'à présent va être ainsi capitalisée car réinjectée dans le problème inverse afin d'orienter la recherche d'une solution au regard des mesures.

Nous commençons ce chapitre par une brève présentation des principes de résolution des problèmes inverses linéaires. Nous nous intéressons tout d'abord à la résolution des problèmes surdéterminés (plus d'information mesurée que d'inconnues à identifier). Les problèmes inverses sont cependant souvent sous-déterminés (moins d'information mesurée que d'inconnues à trouver). Il est alors qualifié de mal posé. Le problème inverse n'a donc pas de solution unique et nous proposons d'apporter de l'information a priori pour aider la résolution. Que ce soit la mesure, le modèle mathématique choisi ou l'information a priori apportée, remarquons que tous les éléments considérés sont profondément incertains. C'est pourquoi nous allons faire le choix d'une approche statistique utilisant le théorème de Bayes.

## IV.1. Introduction aux problèmes inverses

### IV.1.1. Paramétrisation et caractère bien ou mal posé du problème

La paramétrisation est la première étape essentielle pour la résolution de tout problème inverse. Elle consiste à développer un modèle mathématique direct des phénomènes à observer et ceci de la manière la plus pertinente possible.

Dans notre cas, il s'agit de la définition de l'écriture harmonique du champ présentée dans le chapitre précédent. Le problème inverse consiste alors à résoudre le système linéaire déjà présenté et dont on rappelle la forme ici.

$$A.X = B \quad (\text{IV.1})$$

Où la matrice « A » contient les fonctions harmoniques sphériques, le vecteur « X » contient les coefficients harmoniques à identifier et le vecteur « B » contient les mesures du champ. On peut se référer aux équations (III.32) à (III.35) dans le chapitre précédent pour plus de détails.

Le problème direct est déterministe puisque les mêmes causes (paramètres) produisent les mêmes effets. Il est donc en général bien posé, caractère défini par [HADAMARD 32] et correspondant aux propriétés suivantes :

- Existence d'une solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la solution

Avec quelques précautions, le problème direct est généralement bien posé mais c'est rarement le cas pour les problèmes inverses qui sont donc majoritairement mal posés.

La mesure pouvant être de mauvaise qualité ou entachée de bruit, elle introduit des incertitudes qui peuvent ne pas être en accord avec le modèle. Ces incertitudes ne pouvant être décrites par le modèle, l'existence de la solution semble compromise. Cette difficulté n'en n'est pas vraiment une puisque on pourra toujours trouver une solution «  $X_s$  » qui conduit à une modélisation assez proche des observations.

Le problème inverse consiste ici à résoudre le système linéaire (IV.1) avec si possible autant d'informations que d'inconnues. On comprend bien que la solution ne peut pas être unique lorsqu'il n'y a pas assez d'informations. L'idée naturelle serait de multiplier les points de mesures mais ceux-ci apportent de nouvelles incertitudes et le nombre de paramètres augmente. La solution est donc rarement unique et il convient de choisir la plus vraisemblable. Nous verrons que l'apport d'information *a priori* peut aider dans la sélection de cette solution.

La stabilité de la solution d'un problème inverse rejoint la notion de bruit des mesures. Ce dernier peut être amplifié par le problème inverse et conduire à de fortes variations de la solution : il est alors classique d'étudier le conditionnement de la matrice « A » qui exprime la sensibilité de la solution.

### IV.1.2. Outils pour la résolution des problèmes inverses

#### *La méthode des moindres carrés*

Pour les problèmes inverses, la matrice « A » est rarement carrée et n'est pas inversible. La méthode des moindres carrés peut alors être naïvement utilisée [KERN 02]. Il s'agit de déterminer le jeu de paramètres «  $X_{S\_MC\_1}$  » pour minimiser la distance « d » (norme) entre le modèle « A.X » et la mesure « B ».

$$d = \min \|A.X_{S\_MC\_1} - B\|^2 \quad (\text{IV.2})$$

Initialement développée pour les problèmes surdéterminés, cette méthode conduit naturellement à la solution (IV.3) lorsque la matrice « A » est de rang plein<sup>9</sup>.

$$X_{S\_MC\_1} = (A^T.A)^{-1}.A^T.B \quad (\text{IV.3})$$

Cette méthode peut également s'appliquer aux problèmes sous-déterminés de rang plein dont la solution algébrique «  $X_{S\_MC\_2}$  » (IV.4) s'obtient de manière évidente sous ces conditions.

$$X_{S\_MC\_2} = A^T.(A.A^T)^{-1}.B \quad (\text{IV.4})$$

La solution minimise certes la distance entre le modèle et la mesure mais rien n'assure que ce minimum soit global et le résultat peut ne pas être physique. Mais le principal défaut de cette méthode réside dans le terme «  $A^T.A$  » ou «  $A.A^T$  » selon le cas. En effet, quel que soit le conditionnement de la matrice « A », le conditionnement de ces termes est nécessairement plus mauvais et conduit à plus d'instabilité de la solution.

De plus, l'inverse d'une matrice est rarement calculé en pratique car trop coûteuse en temps de calcul. On préfère donc résoudre le système linéaire avec par exemple la factorisation de la matrice A.

---

<sup>9</sup> Le rang d'une matrice traduit le nombre d'équations linéairement indépendantes. Une matrice est donc de rang plein lorsque toutes ces lignes (ou colonnes) sont indépendantes.

### La décomposition en valeurs singulières et pseudo inverse

La décomposition en valeurs singulières (SVD pour singular value decomposition en anglais) est une généralisation de la décomposition en valeurs propres. La SVD d'une matrice « A » de rang « r » de dimension  $\{n^x m\}$  admet l'existence de deux matrices carrées U et V de dimension respective  $\{n^x n\}$  et  $\{m^x m\}$ , orthogonales ( $U.U^T = Id$  et  $V.V^T = Id$ ) telles que :

$$A = U . \Sigma . V^T \quad (IV.5)$$

La matrice «  $\Sigma$  » de dimension  $\{n^x m\}$  contient les « r » valeurs singulières «  $S_i$  » sur sa « diagonale » et est nulle partout ailleurs. Ces valeurs sont classées dans l'ordre décroissant et sont strictement positives (elles sont en réalité égale au carré des valeurs propres).

Cela conduit alors à la définition de la matrice «  $A^+$  », pseudo-inverse de « A » telle que la solution «  $X_{SVD}$  » s'écrit :

$$X_{SVD} = A^+ . B \quad avec \quad A^+ = V . \Sigma^+ . U^T \quad (IV.6)$$

Avec «  $\Sigma^+$  » (de dimension  $\{m^x n\}$ ) qui est de la forme de la transposée de «  $\Sigma$  » en remplaçant les valeurs singulières par leurs inverses.

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.7)$$

Il est opportun de rappeler ici la notion de conditionnement. En effet, celui-ci est donné par la relation (IV.9) où «  $\|\cdot\|$  » représente la norme Euclidienne, définie comme suit :

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A^T \rangle} = \left( \sum A_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (IV.8)$$

Le conditionnement de la matrice « A » (en norme  $L_2$ ) est le ratio entre les valeurs singulières extrêmes : le conditionnement idéal vaut alors  $Cond(A) = 1$ .

$$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{S_1}{S_r} \quad (IV.9)$$

On aperçoit mieux l'importance de cette valeur sur la sensibilité de la solution en réexaminant la solution obtenue par le calcul de pseudo-inverse :

$$X_{SVD} = \sum_{i=1}^r \frac{Y_i}{S_i} V_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i V_i \quad avec \quad Y = U^T . B \quad (IV.10)$$

Où les «  $\alpha_i$  » peuvent être quelconques.

En effet, si le problème est surdéterminé et de rang «  $r$  » plein, il y a alors autant de valeurs singulières que d'inconnues et les «  $\alpha_i$  » n'existent pas. Par contre, lorsque le problème inverse est sous déterminé, cette écriture met clairement en évidence qu'il existe une infinité de solutions avec une partie observable (terme de gauche) et une partie non observable (terme de droite) qui peut être quelconque.

Ce que l'on appelle la quasi-solution impose alors tous les «  $\alpha_i = 0$  » et ainsi «  $X_{SVD}$  » est de norme minimale. Le choix de cette solution est souvent physique mais cela implique une hypothèse importante de compatibilité avec le modèle choisi. Dans notre cas, le modèle est mathématique (développement en harmoniques sphériques) et non physique. Cette solution n'est alors pas directement compatible car elle minimise la valeur des coefficients des ordres supérieurs, ce qui interdit une bonne approximation harmonique du champ à proximité de la surface de la sphère d'étude.

### *Stabilisation de la solution*

Revenons à la notion de conditionnement. On aperçoit qu'une grande valeur indique un grand écart entre la première et la dernière valeur singulière. L'équation (IV.10) illustre clairement qu'une petite variation de «  $B$  » (à cause du bruit de mesure par exemple) peut être très largement amplifiée sur la solution.

Il existe des techniques pour limiter ce phénomène et nous ne citerons à ce stade que la troncature de spectre pour information. Celle-ci consiste à retirer les plus petites valeurs singulières. Cela améliore naturellement la stabilité mais s'accompagne d'une perte d'information.

## **IV.1.3. Application au modèle des boucles de courant**

### *Problème inverse surdéterminé*

Reprenons l'étude du champ à l'intérieur de la sphère présentée au chapitre précédent (Figure III 6 et Figure III.7). Nous avons vu que l'induction à l'intérieur de cette sphère peut être approchée avec l'écriture harmonique à l'ordre 5, soit 35 coefficients.

On décide de placer 25 capteurs tri-axes sur la surface de la sphère, soit 75 informations. Le problème est donc surdéterminé.

Dans cet exemple, ces informations proviennent du calcul exact des composantes du champ sur les points définis. Le seul bruit provient de la précision informatique et peut être négligé dans notre application. Ainsi en considérant que le modèle harmonique est bien représentatif, le problème inverse devrait trouver une solution unique et stable.

La Figure IV.1 illustre une première répartition de ces 25 points de mesures sur toute la surface de la sphère. La matrice «  $A$  » associée à ce problème est de dimension  $\{75 \times 35\}$  et de conditionnement (sans normalisation) relativement faible :  $\text{Cond}(A) = 150$ .



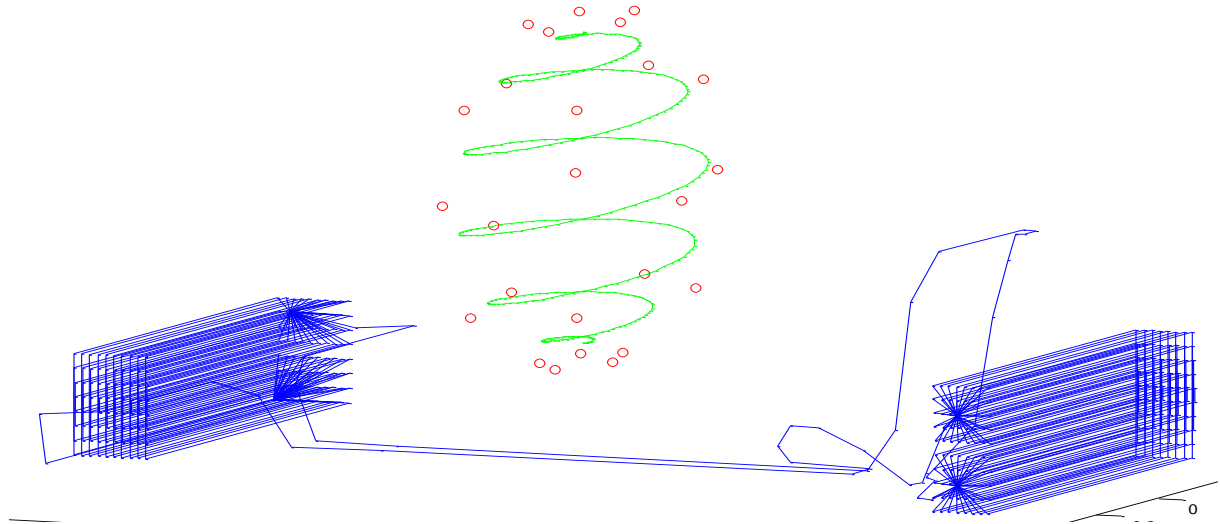


Figure IV.1 : Répartition des points de mesures virtuelles sur toute la surface de la sphère pour un problème inverse surdéterminé et bien posé

La matrice « A » est de rang plein ( $\text{Rang}(A) = 35$ ) et la matrice «  $\Sigma$  » des valeurs singulières de ce problème inverse bien posé est de dimension  $\{75 \times 35\}$ , équation (IV.11).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & S_{35} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

La solution «  $X_{\text{SVD}}$  » est ensuite donnée par l'équation (IV.12).

$$X_{\text{SVD}} = \sum_{i=1}^{r=35} \frac{Y_i}{S_i} V_i \quad \text{avec } Y = U^T \cdot B \quad (\text{IV.12})$$

La Figure IV.2. présente les coefficients harmoniques identifiés des ordres 1 à 4 (valeurs pondérées par le terme «  $r^{n-1}$  » lorsque  $r = 0,3 \text{ m}$ ). Ce sont les mêmes que ceux présentés dans le chapitre précédent.

Ces derniers avaient été obtenus par la projection de l'induction magnétique sur les fonctions harmoniques. On constate alors que la présente méthode (équation (IV.6)) qui consiste à résoudre un système linéaire est bien plus rapide que le calcul de l'intégrale surfacique (équation (III.36)).

On note également que les points de mesure ne sont pas régulièrement répartis sur la surface de la sphère d'étude, contrairement au calcul intégral qui nécessite cette caractéristique.

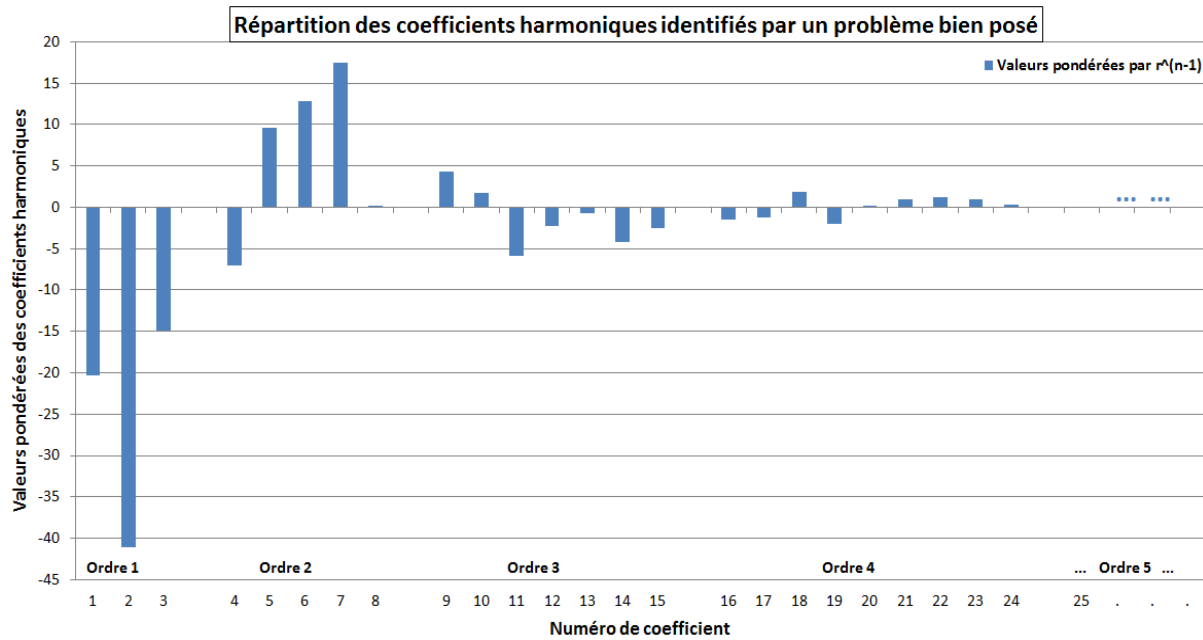


Figure IV.2 : Répartition des coefficients harmoniques identifiés par le problème inverse bien posé

On aperçoit alors la possibilité d'identifier les paramètres du modèle directement par la mesure du champ. Cependant, cela requiert beaucoup de capteurs sur toute la surface englobant la zone d'étude. Or dans le contexte du véhicule électrique, cette répartition s'avère naturellement gênante pour les passagers.

Imaginons alors que ces 25 points de mesures soient tous répartis sur une petite zone de la sphère afin de ne pas gêner les personnes. La Figure IV.3 présente une proposition de placement des capteurs dans ces conditions. La matrice « A » associée à ce problème est de même dimension que précédemment mais de conditionnement bien plus mauvais :  $\text{Cond}(A) = 1,2 \times 10^{12}$ . C'est un cas extrême, volontairement choisi pour l'illustration du propos.

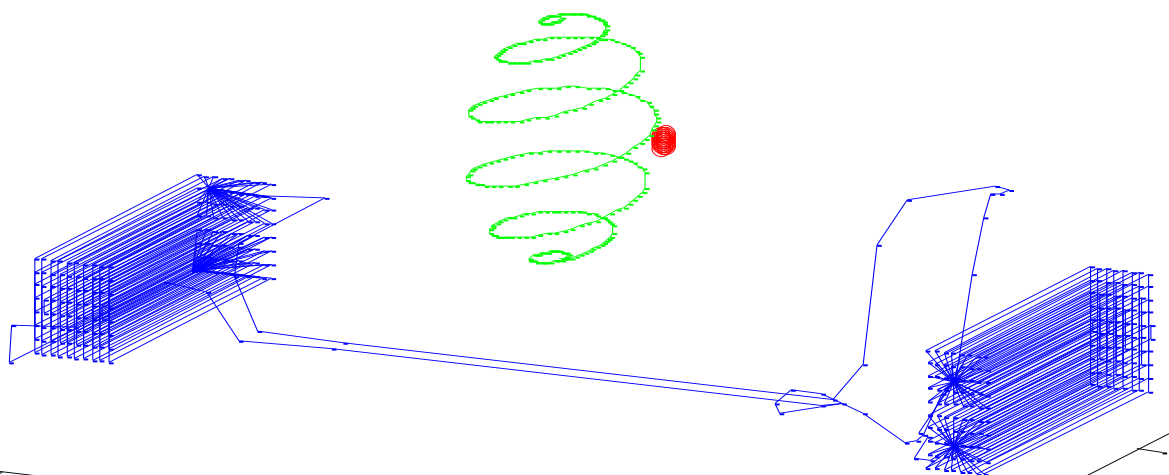


Figure IV.3 : Répartition des points de mesures virtuelles sur une petite surface de la sphère pour un problème inverse surdéterminé et mal posé

Même si le problème inverse par le calcul de la SVD retourne une solution, celle-ci n'est absolument pas correcte et l'identification a échoué.

En effet, toutes les lignes du système linéaire (IV.1) sont quasi identiques et tout ce passe comme s'il n'y avait que très peu d'informations. La Figure IV.4 présente les coefficients harmoniques identifiés par ce problème mal posé : la différence avec ceux identifiés plus tôt est criante.

On aperçoit alors l'importance de la répartition des capteurs, comme cela a déjà été adressé dans [ROUVE 06] : celui-ci doit être assez uniforme (le plus régulier possible).

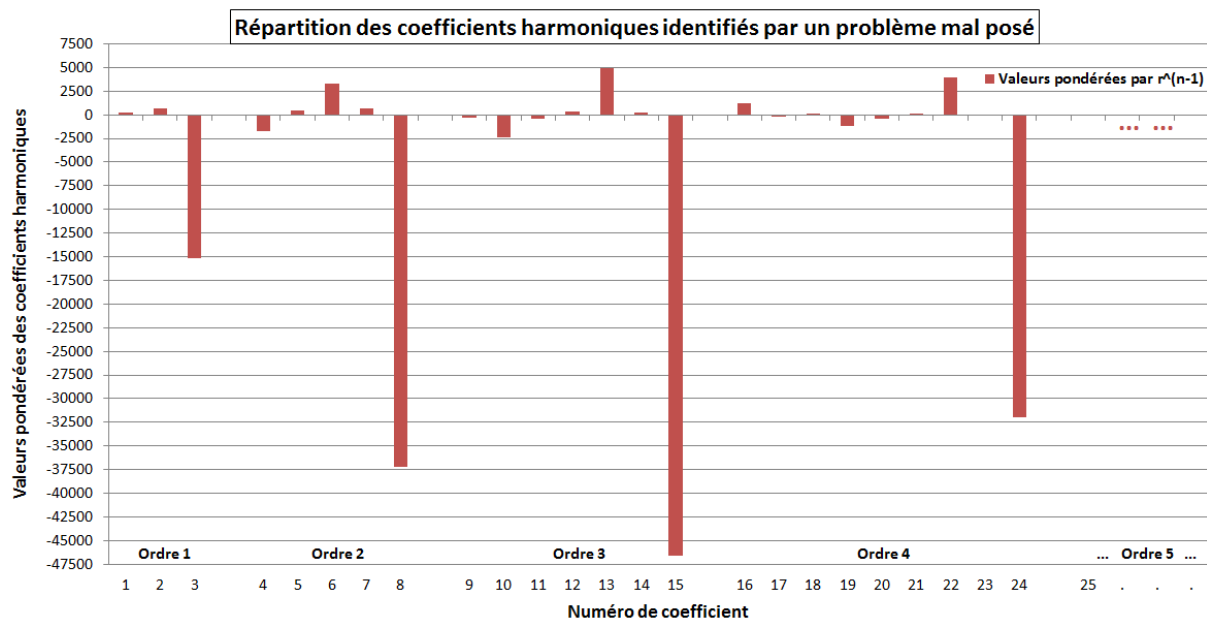


Figure IV.4 : Répartition des coefficients harmoniques identifiés par le problème inverse mal posé

Dans ce contexte purement numérique, le placement de beaucoup de capteurs bien répartis sur la sphère d'étude permet l'identification des coefficients.

Dans un contexte plus réaliste, il est inutile d'augmenter à l'infini le nombre de capteurs car chaque information étant accompagnée d'incertitudes, le problème inverse n'est jamais vraiment surdéterminé. On notera également les contraintes de coût et de réalisation qui interdisent la mise en œuvre de cette solution.

### Problème inverse sous déterminé

Dans cet exemple purement numérique, le problème inverse est sous-déterminé parce que le nombre de points de mesure est inférieur au nombre de paramètres à identifier.

La Figure IV.5 présente le placement de 6 capteurs tri-axes répartis sur toute la surface de la sphère. Cette configuration n'apporte donc que 18 informations et le problème est sous-déterminé : la matrice « A » associée à ce problème est de dimension  $\{18 \times 35\}$ .

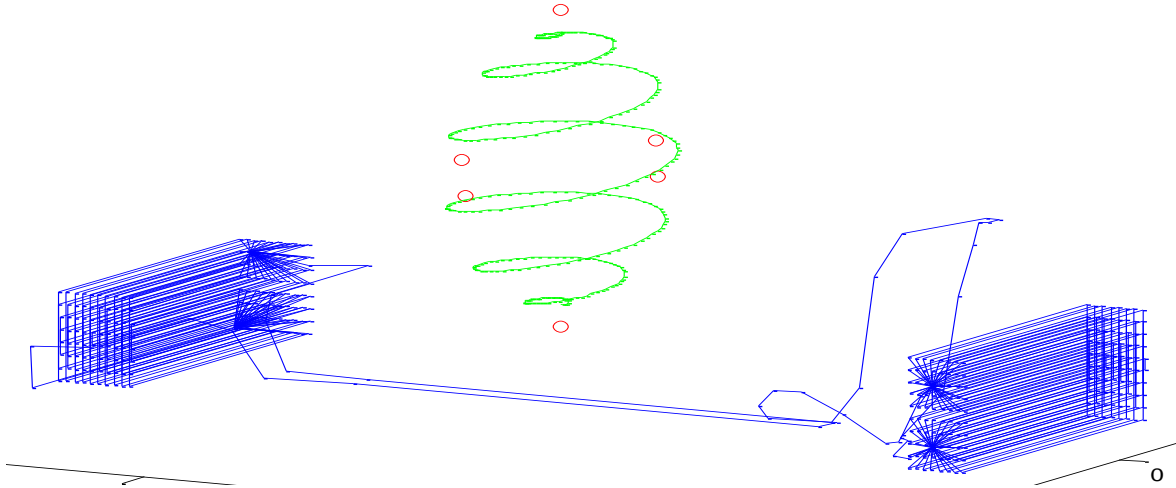


Figure IV.5 : Répartition des points de mesures virtuelles sur toute la surface de la sphère pour un problème inverse sous-déterminé

Les capteurs étant bien répartis sur toute la surface de la sphère, le conditionnement de la matrice «  $A$  » est faible :  $\text{Cond}(A) = 10$ . Elle est de rang plein ( $\text{Rang}(A) = 18$ ) et conduit à la matrice «  $\Sigma$  » des valeurs singulières de dimension  $\{18 \times 35\}$ , d'expression (IV.13). La quasi-solution «  $X_{\text{SVD}}$  » obtenue est ensuite donnée par l'équation (IV.14).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{18} & \end{pmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$X_{\text{SVD}} = \sum_{i=1}^{r=18} \frac{Y_i}{S_i} V_i \quad \text{avec } Y = U^T \cdot B \quad (\text{IV.14})$$

Malgré le bon conditionnement de la matrice, le manque d'informations ne permet qu'une identification partielle des coefficients harmoniques. En effet, la solution obtenue est de norme minimale et la valeur des coefficients au-delà de l'ordre 3 (15 coefficients) est largement minimisée.

La Figure IV.6 compare les coefficients harmoniques identifiés ici avec ceux de référence obtenus plus tôt dans ce chapitre (Figure IV.2) et dans le chapitre précédent (Figure III.8). Cela montre que l'hypothèse de norme minimale de la solution ne semble donc pas valide pour notre cas où la modélisation est purement mathématique.

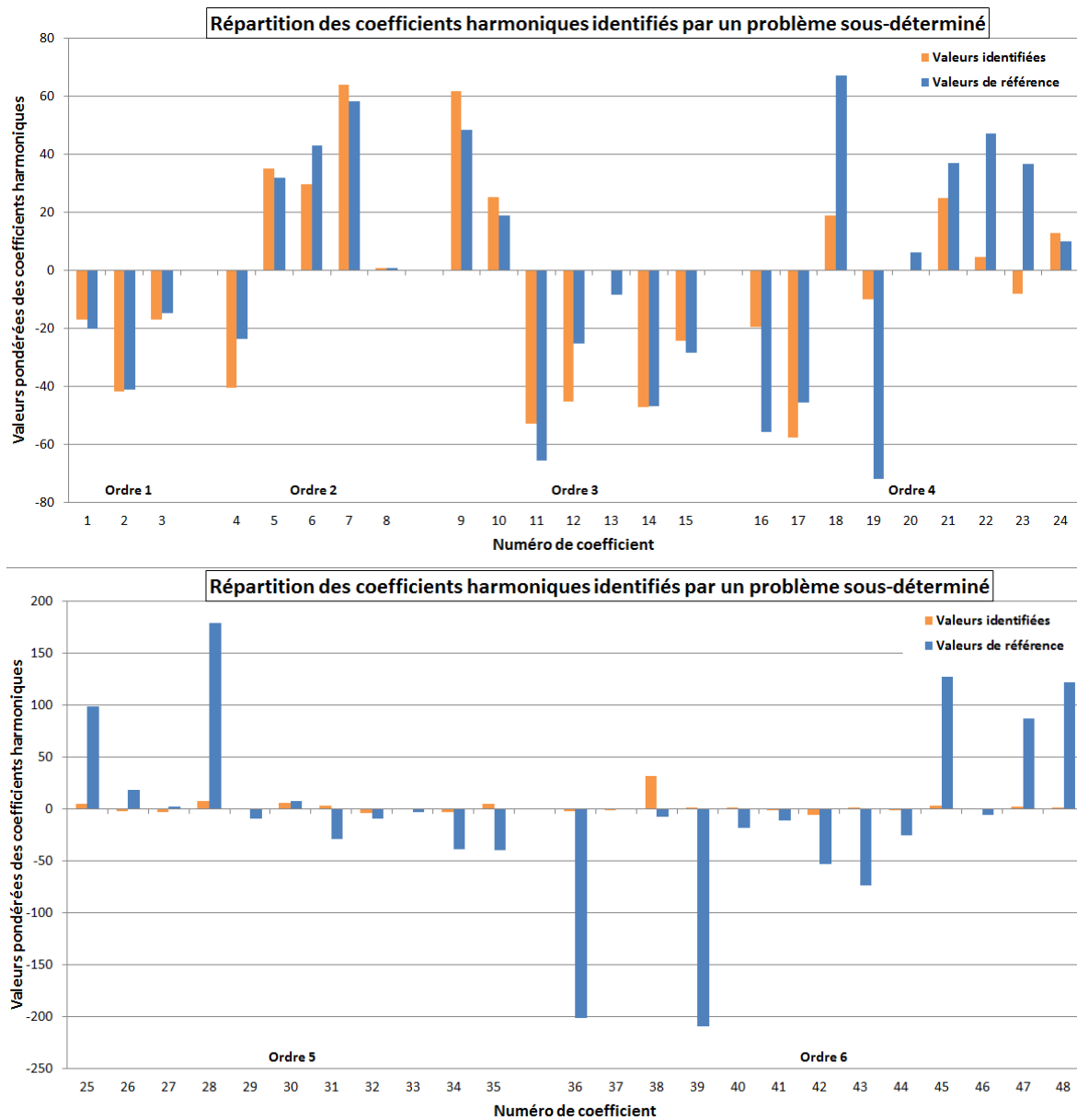


Figure IV.6 : Comparaison de la répartition des coefficients harmoniques de référence avec ceux identifiés par le problème inverse sous déterminé

De plus, le cadre d'application de nos travaux est l'étude du champ à l'intérieur de l'habitacle d'un véhicule. Si nous nous concentrons sur la sphère correspondant au passager avant, il paraît difficile de placer ne serait-ce que 12 capteurs tri-axes (36 informations) sur toute la surface de la sphère d'étude. On imagine aisément la gêne occasionnée par cette configuration. La solution de retreindre la répartition du bon nombre de capteurs dans une petite zone, non gênante pour le passager, n'en n'est pas une car cela conduit à un mauvais conditionnement du système et le problème inverse échoue dans sa tâche.

Notre objectif consiste alors à identifier les coefficients harmoniques avec très peu de capteurs. L'information apportée par la mesure étant rare, il semble opportun d'avoir une approche statistique du problème inverse, permettant également l'apport d'informations *a priori* pour orienter la solution.

## IV.2. L'approche statistique du problème inverse

### IV.2.1. La régularisation de Tikhonov

Cette méthode consiste à ajouter une certaine quantité d'informations *a priori* et contribue à la stabilisation de la solution. Pour ce faire, il faut définir un opérateur régularisant « R » qui impose aux solutions d'appartenir à un certain espace. Cette appartenance est ensuite modulée par un compromis entre les mesures et l'information *a priori*.

La régularisation de Tikhonov consiste donc à trouver une solution «  $X_s$  » qui minimise la distance « d » entre le modèle et la mesure sous la contrainte de l'opérateur « R ».

$$d = \min(\|A.X_s - B\|^2 + \alpha \cdot \|R.X_s\|^2) \quad (\text{IV.15})$$

Où «  $\alpha$  » est un scalaire représentant le compromis entre l'information *a priori* et la mesure. La méthode la plus classique pour déterminer ce coefficient consiste à tracer la courbe en forme de « L » représentant la distance entre le modèle et la mesure  $\|A.X_s - B\|$  en fonction de la norme de l'opérateur de régularisation  $\|R.X_s\|$ . La valeur optimale de «  $\alpha$  » se trouve alors dans le coude de cette courbe (voir [CHADEBEC 01] pour un exemple).

Les outils de résolution présentés plus tôt s'appliquent également ici mais il reste encore à préciser ce qu'est l'opérateur de régularisation.

Celui-ci dépend des connaissances que nous avons du système :

- Si on ne sait rien *a priori*, «  $R = 0$  » et on retrouve le système des moindres carrés (IV.2) à résoudre.
- Si on étudie des paramètres physiques, l'opérateur « R » peut par exemple imposer la régularité de la solution (lissage en limitant la vitesse de variation). Ce n'est absolument pertinent pour notre problème.
- Si on possède un jeu de paramètres *a priori* «  $X_0$  », l'opérateur de régularisation naturel peut imposer la proximité de la solution avec cette information.

$$d = \min(\|A.X_s - B\|^2 + \alpha \cdot \|X_s - X_0\|^2) \quad (\text{IV.16})$$

Ce dernier opérateur de régularisation semble être une bonne approche. Rappelons cependant que la mesure tout comme l'information *a priori* est incertaine. Si on imagine clairement comment utiliser la valeur moyenne, l'intervalle de confiance qui est associé est plus difficile à prendre en compte avec cette approche.

C'est pourquoi nous nous sommes orientés vers l'approche Bayésienne [BAYES 63], [TARANTOLA 87] qui traite le problème inverse comme un regroupement d'informations statistiques de différentes natures.

## IV.2.2. L'inférence Bayésienne

### Introduction au théorème de Bayes et justifications

Le théorème de Bayes est issu de la définition des probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(C|D).P(D) = P(C \cap D) = P(D|C).P(C) \quad (\text{IV.17})$$

Où  $P(C \cap D)$  est la probabilité que les événements « C » et « D » aient tous les deux lieux en même temps. En divisant de part et d'autre par  $P(D)$ , on obtient le théorème de Bayes :

$$P(C|D) = \frac{P(D|C).P(C)}{P(D)} \quad (\text{IV.18})$$

Chaque terme de cette relation a une dénomination usuelle :

- Le terme  $P(D|C)$  donne la probabilité conditionnelle de « D » sachant « C » et est appelée *fonction de vraisemblance*.
- Le terme  $P(C)$  est la probabilité *a priori* de « C ».
- Le terme  $P(D)$  est la probabilité *a priori* de « D ».
- Le terme  $P(C|D)$  donne la probabilité conditionnelle de « C » sachant « D » et est appelée probabilité *a posteriori*.

L'inférence Bayésienne s'appuie donc essentiellement sur ce théorème afin de déduire la probabilité d'un événement à partir de celles d'autres événements déjà évalués. Largement utilisée dans le domaine médical pour la magnéto-cartographie ou l'électro-encéphalographie [SCHMIDT 99], [SCHMIDT 00], elle l'est également en géophysique pour l'étude des sols par exemple [NOTARNICOLA 02] ou en astrophysique [BARTOLOMEO 07]. Par contre, son application claire en génie électrique est assez nouvelle.

Associé à notre problème, l'événement « C » décrit les coefficients harmoniques que nous cherchons à identifier et l'événement « D » représente les mesures de champ magnétique que nous avons à disposition. Cela suppose donc de définir une loi de probabilité *a priori* des coefficients harmoniques ( $P(C)$ ) et d'écrire la distribution conditionnelle des niveaux de champ magnétique sachant les coefficients harmoniques ( $P(D|C)$ ).

Les fonctions de densités de probabilités représentatives peuvent être quelconques mais dans le cadre des problèmes discrets linéaires, il est courant d'utiliser la loi Normale.

Cela se justifie en réexaminant l'écriture harmonique du champ que nous rappelons :

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \mathbf{grad} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot r^n \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \right) \quad (\text{IV.19})$$

En considérant que chaque coefficient harmonique «  $a_{n,m}$  » est une variable aléatoire, on s'aperçoit que le champ est la somme de ces variables aléatoires et on peut invoquer le « théorème central limite <sup>10</sup> » qui conduit à la distribution Gaussienne pour le vecteur «  $\mathbf{B}$  ».

De la même manière, réexaminons l'écriture des coefficients harmoniques en deux dimensions (paragraphe 2 du chapitre précédent). Si la source est composée de «  $k$  » conducteurs, les coefficients harmoniques sont de la forme suivante :

$$a_n = \sum_{i=1}^k \frac{I_i \cdot r_i^{-n}}{n} \cdot \cos(n \cdot \varphi_i) \quad (\text{IV.20})$$

En considérant que les paramètres physiques ( $I_i$ ,  $r_i$ ,  $\varphi_i$ ) sont des variables aléatoires, alors une variable aléatoire globale dépendante de ces paramètres aléatoires est créée. Ainsi, chaque coefficient harmonique est une somme de ces variables aléatoires globales et on peut ré-invoquer le « théorème central limite ».

Revenons alors aux différents termes du théorème de Bayes et faisons l'analogie avec le problème linéaire «  $A \cdot X = B$  » que l'on souhaite résoudre. La fonction de vraisemblance est la représentation statistique du modèle direct.

$$P(B|X) = \mathcal{N}(AX, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\|AX - B\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (\text{IV.21})$$

Où «  $\sigma^2$  » est la variance que nous estimons et qui peut avoir plusieurs contributions. Pour celle uniquement due à la modélisation, on peut considérer une incertitude théorique «  $\sigma_T$  » de la représentation développée. D'un point de vue pratique, on peut considérer l'incertitude de la mesure à travers «  $\sigma_m$  ».

Dans le cas général, ces deux contributions de l'incertitude se cumulent. Néanmoins, dans le cadre de nos travaux, nous considérons que le modèle harmonique est certain (c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter des termes d'ordre supérieur dans la décomposition considérée) et qu'ainsi la seule incertitude provient des mesures. Réécrivons alors cette densité de probabilité d'un point de vue matriciel à partir des observations (mesures) effectuées «  $B_m$  » dont l'incertitude est décrite par la matrice de covariance «  $S_m$  ».

$$P(B_m|X) = C^{ste} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m)\right) \quad (\text{IV.22})$$

L'information *a priori* que nous avons sur les paramètres est décrit par la densité de probabilité  $P(X)$  et est définie par la valeur moyenne «  $X_0$  » et la matrice de covariance «  $S_0$  ».

---

<sup>10</sup> Le théorème central limite établit que la somme d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge vers la loi normale.



$$P(X) = C^{ste} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (X - X_0)^T \cdot S_0^{-1} \cdot (X - X_0)\right) \quad (\text{IV.23})$$

La matrice de covariance «  $S_0$  » représente les incertitudes modélisées de l'information *a priori*. Elle traduit par exemple l'incertitude de la position des sources (position des conducteurs) à travers la répartition statistique des coefficients harmoniques.

La densité de probabilité *a posteriori*  $P(X|B_m)$  est la représentation statistique du problème inverse lorsque de l'information *a priori* a été insérée. La valeur la plus probable est donnée par le vecteur «  $X$  » (des coefficients harmoniques) qui maximise cette probabilité *a posteriori* : c'est ce que l'on appelle le maximum *a posteriori*.

Ceci se traduit par la minimisation de la fonction suivante :

$$f = (AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m) + (X - X_0)^T \cdot S_0^{-1} \cdot (X - X_0) \quad (\text{IV.24})$$

**Remarque 1 :** Notons que l'on cherche le maximum de la probabilité *a posteriori*. Ainsi il est inutile de faire une quelconque hypothèse sur la répartition statistique des niveaux mesurés car la densité de probabilité *a priori*  $P(B_m)$  n'intervient pas.

**Remarque 2 :** Notons également que l'on aurait pu aussi opter pour l'estimateur du minimum de variance qui conduit à une solution la plus certaine (disons la plus stable) mais qui n'est pas forcément la plus probable. Nous n'avons pas étudié cet estimateur et nous nous sommes concentrés sur le maximum de la probabilité (maximum de vraisemblance et maximum *a posteriori*).

### L'estimateur du maximum de vraisemblance

Si nous ne possédons aucune information *a priori*, la densité de probabilité associée est constante et le formalisme Bayésien ne fait pas la différence entre la fonction de vraisemblance ( $P(B|X)$ ) et la densité de probabilité *a posteriori* ( $P(X|B)$ ).

On cherche donc une solution «  $X$  » uniquement à l'aide de la fonction de vraisemblance. L'estimateur de maximum de vraisemblance consiste donc à minimiser l'expression suivante :

$$\min((AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m)) \quad (\text{IV.25})$$

La solution «  $X_{MV}$  »<sup>11</sup> qui annule cette expression, maximise la fonction de vraisemblance ( $P(B|X)$ ) et est donnée par [TARANTOLA 87], [KAY 93] :

$$X_{MV} = (A^T S_m^{-1} A)^{-1} A^T S_m^{-1} B_m \quad (\text{IV.26})$$

On retrouve finalement la solution donnée par l'estimateur des moindres carrés pondérée par la matrice de covariance «  $S_m$  ».

---

<sup>11</sup> On pourra se reporter à l'annexe D pour quelques détails de calcul qui conduisent à  $X_{MV}$ .

### L'estimateur du maximum a posteriori

Lorsque de l'information *a priori* peut être insérée, l'estimateur du maximum de vraisemblance s'applique à la densité de probabilité *a posteriori*. C'est pourquoi on parle d'estimateur de maximum *a posteriori* qui consiste à minimiser la fonction (IV.24).

La solution «  $X_{MAP}$  »<sup>12</sup> qui annule cette fonction, maximise la densité de probabilité *a posteriori* et est donnée ci-dessous :

$$X_{MAP} = (A^T S_m^{-1} A + S_0^{-1})^{-1} (A^T S_m^{-1} B_m + S_0^{-1} X_0) \quad (\text{IV.27})$$

Elle s'écrit également comme suit :

$$X_{MAP} = X_0 + (A^T S_m^{-1} A + S_0^{-1})^{-1} A^T S_m^{-1} (B_m - A X_0) \quad (\text{IV.28})$$

Grâce à une des identités de Sherman-Morrison-Woodbury [GENTLE 07], il est également possible de l'écrire:

$$X_{MAP} = X_0 + S_0 A^T (A S_0 A^T + S_m)^{-1} (B_m - A X_0) \quad (\text{IV.29})$$

On observe clairement que la solution sera centrée sur l'information *a priori* «  $X_0$  ». La correction permise est proportionnelle à l'écart existant entre les mesures et le modèle *a priori* tout en tenant compte des différentes incertitudes (sur l'information *a priori* «  $S_0$  » et sur la mesure «  $S_m$  »).

On note également que si une information est beaucoup trop incertaine, il est inutile de l'intégrer dans l'approche Bayésienne du problème inverse car celle-ci sera naturellement évincée. Cela s'observe clairement sur l'écriture (IV.27). Si l'information *a priori* est trop incertaine, «  $S_0^{-1} \rightarrow 0$  » et  $X_0$  ne sera pas pris en compte et on retrouve la solution du maximum de vraisemblance (IV.26). On retrouve le même comportement avec l'information mesurée qui, si elle est trop incertaine, fait tendre la solution directement vers l'information *a priori*.

Pour faire le pendant, il est également inutile d'apporter une information *a priori* trop certaine. En effet, celle-ci ne pourra pas être modifiée par l'information mesurée mais surtout, étant certaine, elle n'est pas inconnue et ne nécessite donc pas d'être identifiée.

---

<sup>12</sup> On pourra se reporter à l'annexe E pour quelques détails de calcul qui conduisent à  $X_{MAP}$ .

### IV.2.3. Evaluation des termes matriciels

#### *Incertitude du modèle et de la mesure, matrice « $S_m$ »*

La matrice de covariance «  $S_m$  » intègre les incertitudes de modélisation et de mesure.

Dans le cadre de nos travaux, nous considérerons alors que l'incertitude de modélisation est nulle. En effet, pour l'approche purement numérique présentée plus tôt, nous avons évalué l'ordre maximum de la décomposition harmonique permettant une erreur d'approximation inférieure à un certain seuil. C'est-à-dire que nous considérons que les ordres harmoniques supérieurs sont largement négligeables.

Pour l'approche pratique, en considérant que le modèle *a priori* des sources est suffisamment représentatif, on peut raisonnablement considérer que les sources de champ non représentées par le modèle auront en priorité une influence sur les premiers ordres harmoniques, la décroissance du champ avec la distance filtrant naturellement les ordres élevés.

La matrice de covariance «  $S_m$  » ne contient alors que les incertitudes de mesure. En considérant que la position des capteurs ainsi que l'orientation des axes de mesure sont parfaitement maîtrisées, il est classique [SCHMERBER 06] de ne définir que la diagonale de cette matrice avec la variance du bruit de chaque mesure. En supposant que chaque mesure est affectée par la même puissance de bruit, cette matrice sera alors proportionnelle à l'identité.

$$S_m = \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Cette hypothèse est justifiée que si on ne tient compte que du bruit intrinsèque au capteur. Il est alors assez naturel de dire que le bruit intrinsèque d'un capteur n'est pas corrélé au bruit intrinsèque d'un autre.

Par contre, si on tient compte du bruit de l'environnement, il est fort probable que celui-ci soit corrélé sur les différents capteurs. On pourra alors effectuer une mesure « à vide » par exemple afin d'estimer cette covariance.

#### *Valeur a priori de la solution, vecteur « $X_0$ »*

Le vecteur «  $X_0$  » contient le jeu des coefficients harmoniques obtenu par l'étude du modèle *a priori*. Il est bien sûr calculé pour la même zone d'étude du champ et s'obtient soit par la projection du champ sur les fonctions harmoniques sphériques (calcul de produit scalaire, voir le chapitre précédent), soit par la résolution d'un problème inverse numérique (présenté plus tôt dans ce chapitre).

### *Incertitude de l'information a priori, matrice « $S_0$ »*

La matrice de covariance «  $S_0$  » illustre les incertitudes de la solution *a priori* : «  $X_0$  ».

Comme nous le savons, ces coefficients intègrent l'influence de tous les paramètres physiques de la source. La difficulté avec le formalisme des harmoniques sphériques réside dans le caractère non linéaire de cette écriture liant les coefficients harmoniques aux paramètres physiques (voir l'expression (IV.20) exprimant le coefficient harmonique pour une répartition de conducteurs linéiques, rectilignes et infinis).

Sur la base du cas d'étude des conducteurs linéiques rectilignes de longueur infinie (revoir la Figure III.1 dans le chapitre précédent), grâce à l'écriture analytique des coefficients harmoniques, le calcul formel de cette matrice de covariance a été réalisé<sup>13</sup>.

Pour le cas étudié en trois dimensions, nous n'avons pas d'expression littérale de ces coefficients en fonction des paramètres physiques. Il semblerait pertinent d'estimer la densité de probabilité statistique des coefficients harmoniques par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode utilisant la théorie des grands nombres pour estimer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, on comprend que le temps de calcul peut alors être problématique. En effet, le temps de calcul des modèles présentés dans ce chapitre (Biot et Savart) est court mais l'ajout des éléments ferromagnétiques peut considérablement augmenter ce temps (un calcul passant de moins de 1 seconde à plus de 15 minutes).

C'est pourquoi nous nous sommes orientés vers une autre méthode appelée « Unscented Transform<sup>14</sup> » qui est basée sur l'intuition suivante :

*« A partir d'un nombre limité de paramètres, il devrait être plus simple d'approcher les moments statistiques plutôt que la loi de probabilité elle-même » [HULMANN 95].*

Développée par [HULMANN 95] et [JULIER 95], c'est une approche pour le filtrage de systèmes dont le lien entre les entrées et les sorties est non linéaire. Cette approche estime les moments statistiques des variables aléatoires de sortie (les coefficients harmoniques dans notre cas) à partir des moments statistiques des variables aléatoires d'entrée (les paramètres géométriques du modèle physique dans notre cas). Contrairement à la méthode de Monte Carlo, cette estimation est réalisée de manière déterministe à partir d'un nombre limité de valeurs d'entrées, appelées « Sigma Point » et ceci sans aucun a priori sur la loi de probabilité.

[JULIER 95], [JULIER 97] expliquent le principe en prenant une variable aléatoire «  $\mathbf{U}$  » de dimension «  $n$  », de valeur moyenne «  $\bar{u}$  » et de covariance «  $P_{uu}$  ». Dans ces références, il est fait la remarque que de nombreuses lois de probabilité ont les mêmes moments statistiques d'ordre 1 (moyenne) et d'ordre 2 (variance). Ainsi, en prenant néanmoins l'exemple d'une loi Gaussienne, la densité de probabilité de la variable aléatoire «  $\mathbf{U}$  » peut alors être approchée par «  $2n + 1$  » points pondérés définis comme suit :

---

<sup>13</sup> Se reporter à l'annexe F pour le développement des calculs qui conduisent à la matrice de covariance pour le cas d'étude en deux dimensions (conducteurs linéiques rectilignes de longueur infinie).

<sup>14</sup> Transformation sans odeur en français. D'un point de vue statistique, cela signifie plutôt sans coloration si on fait l'analogie avec le bruit blanc contre les bruits colorés (rose par exemple).

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \bar{u} & , W_0 &= k/(n+k) \\
 U_i &= \bar{u} + \left( \sqrt{(n+k)P_{uu}} \right)_i & , W_i &= 1/2(n+k) \\
 U_{i+n} &= \bar{u} - \left( \sqrt{(n+k)P_{uu}} \right)_i & , W_{i+n} &= 1/2(n+k)
 \end{aligned} \tag{IV.31}$$

Où  $i \in [1, n]$ , «  $n$  » étant la dimension de la variable aléatoire «  $\mathbf{U}$  »,  $\left( \sqrt{(n+k)P_{uu}} \right)_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne ou colonne de la racine carrée de la matrice  $(n+k)P_{uu}$ ,  $W_i$  est la pondération associée à l' $i^{\text{ème}}$  point et  $k \in \mathbb{N}$ .

Le paramètre «  $k$  » permet une certaine pondération supplémentaire de la méthode afin d'améliorer l'estimation des moments statistiques d'ordre supérieur à 3. Dans notre cas, nous ne cherchons que les deux premiers moments statistiques (la valeur moyenne et la covariance) et ainsi nous prendrons «  $k = 1$  ». Ce paramètre n'est vraiment pas évident à expliquer et nous ne pouvons que conseiller la lecture de [JULIER 95], [JULIER 97].

Faisons une illustration simple avec un seul paramètre aléatoire en entrée. Soit la variable aléatoire «  $\mathbf{U}$  » de dimension  $n = 1$  suivant une loi Gaussienne de valeur moyenne «  $\mu_x$  » et de variance «  $\sigma_x$  ». La densité de probabilité de cette variable aléatoire peut alors être approchée comme suit :

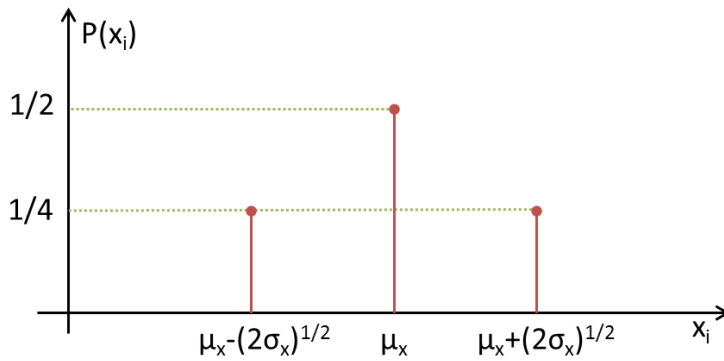


Figure IV.7 : Approximation de la densité de probabilité de la variable aléatoire d'entrée à dimension  $n=1$

La variable de sortie «  $\mathbf{V}$  » est liée à la variable d'entrée «  $\mathbf{U}$  » par l'intermédiaire de la transformation non linéaire «  $f$  ».

$$V_i = f[U_i] \tag{IV.32}$$

La valeur moyenne «  $\bar{v}$  » et la covariance «  $P_{vv}$  » de cette variable aléatoire de sortie sont alors définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i \cdot V_i \\
 P_{vv} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i \cdot (V_i - \bar{v})(V_i - \bar{v})^T
 \end{aligned} \tag{IV.33}$$

Pour plus de détails, on pourra bien sûr se reporter aux publications déjà cités plus tôt ainsi qu'aux suivantes : [JULIER 00], [JULIER 02], [JULIER 03]. Cette méthode de calcul a par ailleurs été récemment mise en œuvre dans [FERBER 13].

Pour notre problème, les paramètres d'entrée sont la valeur du courant et les coordonnées définissant la géométrie des boucles. Les paramètres de sorties sont les coefficients harmoniques.

La valeur du courant est facilement mesurable et de plus son influence sur le coefficient harmonique est linéaire : nous considérerons donc ce paramètre connu. La variable aléatoire d'entrée est alors composée par les coordonnées cartésiennes des points définissant les boucles de courant. Notons que toutes les coordonnées (dans ce repère cartésien) sont indépendantes. Les coefficients harmoniques sont ensuite reliés à cette variable aléatoire (composée des coordonnées) par la résolution du problème inverse numérique.

L'étude statistique du modèle *a priori* est finalement réalisée par l'intermédiaire du logiciel d'optimisation Got-it<sup>15</sup> qui intègre cet algorithme d'estimation et est capable de piloter notre outil de calcul des coefficients harmoniques par problème inverse (code Matlab®).

Chaque coordonnée est alors définie par une loi Gaussienne de valeur moyenne «  $\mu$  » («  $\mu_x$  » pour la coordonnée «  $x$  », «  $\mu_y$  » pour la coordonnée «  $y$  » et «  $\mu_z$  » pour la coordonnée «  $z$  »,) et de variance «  $\sigma$  » («  $\sigma_x$  » pour la coordonnée «  $x$  », etc.). La valeur moyenne définit l'information *a priori* et la variance définit l'incertitude associée. Le logiciel Got-it® applique ensuite l'algorithme présenté mais seulement pour le calcul de la valeur moyenne et de la variance des variables de sortie : c'est-à-dire les coefficients harmoniques.

Pour obtenir les covariances entre les coefficients harmoniques, nous nous sommes basés sur la relation statistique classique suivante :

$$Var(C) = Var(A + B) = Var(A) + Var(B) + 2.Cov(A, B) \quad (IV.34)$$

Où «  $A$  », «  $B$  » et «  $C$  » sont des variables aléatoires.

Dans notre cas, «  $A$  » et «  $B$  » sont deux coefficients harmoniques différents. Nous avons alors défini un script de commande du logiciel Got-it® afin de créer autant de variables aléatoires «  $A + B$  » que nécessaire. C'est-à-dire les somme suivantes par exemple :  $Var(a_{1,0} + a_{1,1})$ ,  $Var(a_{1,0} + a_{1,-1})$ , ...,  $Var(a_{1,0} + a_{6,-6})$  et ainsi de suite pour toutes les combinaisons de coefficients harmoniques.

Ceci fait, le logiciel de calcul Got-it® applique l'algorithme de calcul pour appeler «  $2n + 1$  » fois le code Matlab® («  $n$  » étant la dimension de la variable aléatoire d'entrée, c'est-à-dire le nombre de coordonnées incertaines) et retourner la valeur moyenne et les variances de toutes les variables de sorties alors définies.

---

<sup>15</sup> <http://www.cedrat.com/fr/software/got-it.html>

### IV.3. Validations numériques

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer l'approche Bayésienne du problème inverse. Nous travaillons ici sur un modèle simplifié des boucles de courant par rapport à celles décrites dans le second chapitre (Figure II.11). Ceci avec l'idée de développer une maquette à l'échelle (1:2) pour les validations expérimentales qui seront présentées dans le chapitre suivant.

#### IV.3.1. Modèle étudié et définition de l'information *a priori*

##### Modèle étudié

A partir du modèle complet des boucles de courant, décrit dans le second chapitre, nous reprenons les principales caractéristiques pour définir (Figure IV.8) un modèle simplifié à l'échelle (1:2) : 160 cm de longueur sur 50 cm de largeur.

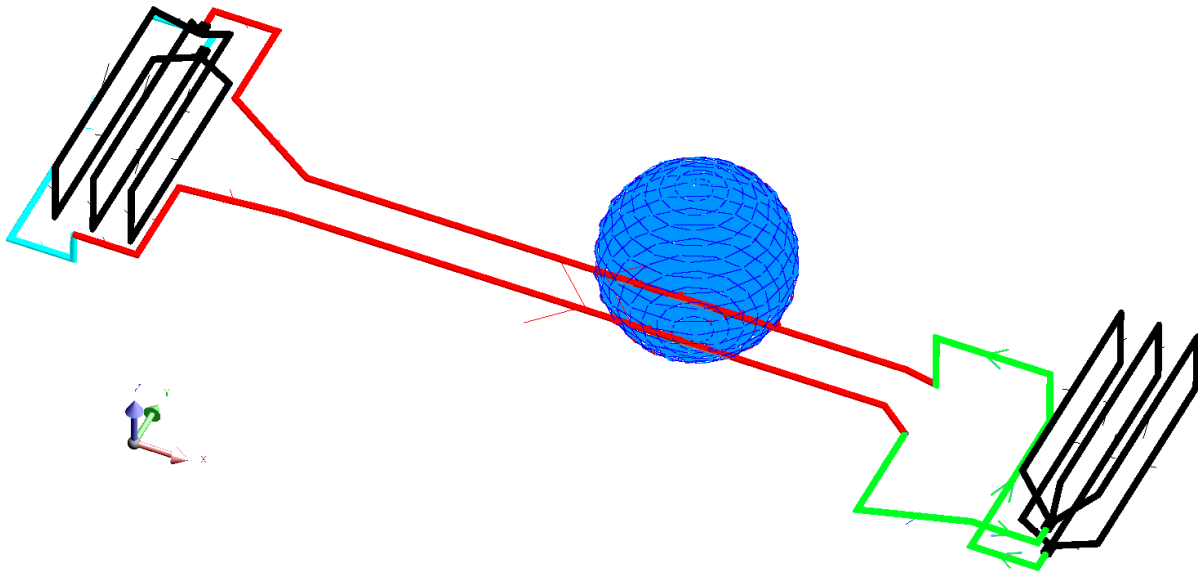


Figure IV.8 : Modèle étudié des boucles de courant pour l'approche Bayésienne du problème inverse

Ce modèle représente la géométrie étudiée de la source. C'est celle que l'on mesure pour évaluer la répartition du champ généré à l'intérieur de la sphère bleue.

Le calcul analytique du champ s'obtient par les relations de Biot et Savart et par la résolution d'un problème inverse surdéterminé, nous sommes capables d'évaluer les coefficients harmoniques pour l'évaluation du champ à l'intérieur de la sphère.

Les calculs permettent de tronquer la décomposition harmonique à l'ordre 6 afin que l'écart entre l'approximation et le calcul exact soit inférieur à 0,01 %.

Cet écart est calculé selon le critère défini dans le chapitre précédent (III.28) dont la formule est rappelée ici avec «  $S_{hs}$  » est le signal tronqué et «  $S_{ref}$  » est le signal de référence.

$$Ecart = 100 * \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (S_{hs}(r, \varphi) - S_{ref}(r, \varphi))^2 d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (S_{ref}(r, \varphi))^2 d\varphi} \quad (IV.35)$$

Le Tableau IV.1 présente le calcul de cet indicateur chiffré et la Figure IV.10 compare la répartition des coefficients harmoniques de ce modèle étudié avec celle du modèle *a priori* que nous allons définir (Figure IV.9).

Ordre maximal N	4	5	6
Ecart en % sur $B_r$	0,461	0,080	0,006
Ecart en % sur $B_\theta$	0,293	0,066	0,033
Ecart en % sur $B_\varphi$	0,112	0,019	0,004
Ecart en % sur le module	0,114	0,022	0,002

Tableau IV.1 : Ecart entre l'approximation harmonique et le calcul exact des composantes du champ du modèle à étudier sur la surface de la sphère d'étude

### Modèle *a priori*

Comme nous l'avons déjà dit en conclusion du second chapitre, aucune modélisation ne peut être entièrement représentative de la réalité car des incertitudes subsistent toujours. Nous définissons alors le modèle *a priori*, volontairement assez différent du modèle étudié pour illustrer ce point et démontrer l'intérêt de l'approche.

Sur la Figure IV.9, on note en effet que l'écart entre les deux câbles (Aller/Retour) traversant est resserré alors que la boucle à l'avant a été supprimée. Ce modèle représente la géométrie *a priori* de la source de champ et du champ sur la sphère est également approché par une décomposition harmonique d'ordre 6 maximum selon le même critère que précédemment (voir le Tableau IV.2).

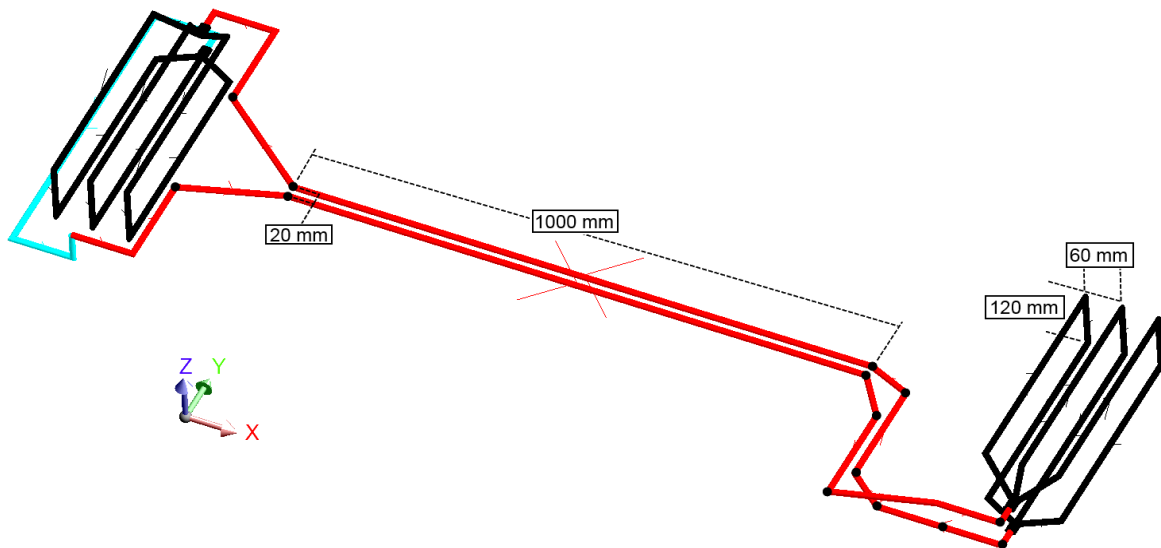


Figure IV.9 : Modèle *a priori* des boucles de courant pour l'apport d'information



Ordre maximal N	4	5	6
Ecart en % sur $B_r$	0,356	0,065	0,006
Ecart en % sur $B_\theta$	0,210	0,047	0,029
Ecart en % sur $B_\varphi$	0,074	0,015	0,005
Ecart en % sur le module	0,080	0,016	0,002

Tableau IV.2 : Ecart entre l'approximation harmonique et le calcul exact des composantes du champ du modèle a priori sur la surface de la sphère d'étude

La Figure IV.10 compare alors la répartition des coefficients harmoniques des ordres 1 à 4, du modèle *a priori* avec la répartition des coefficients du modèle étudié (Figure IV.8). La Figure IV.11 compare ensuite la répartition des coefficients harmoniques des ordres 5 et 6.

Les valeurs présentées sont pondérées par le terme «  $r^{n-1}$  » lorsque «  $r = 0,150 \text{ m}$  » (rayon de la sphère d'étude pour la maquette).

On constate en effet un écart relativement important entre les coefficients harmoniques *a priori* (répartition rouge) et ceux que l'on souhaite trouver (répartition bleue).

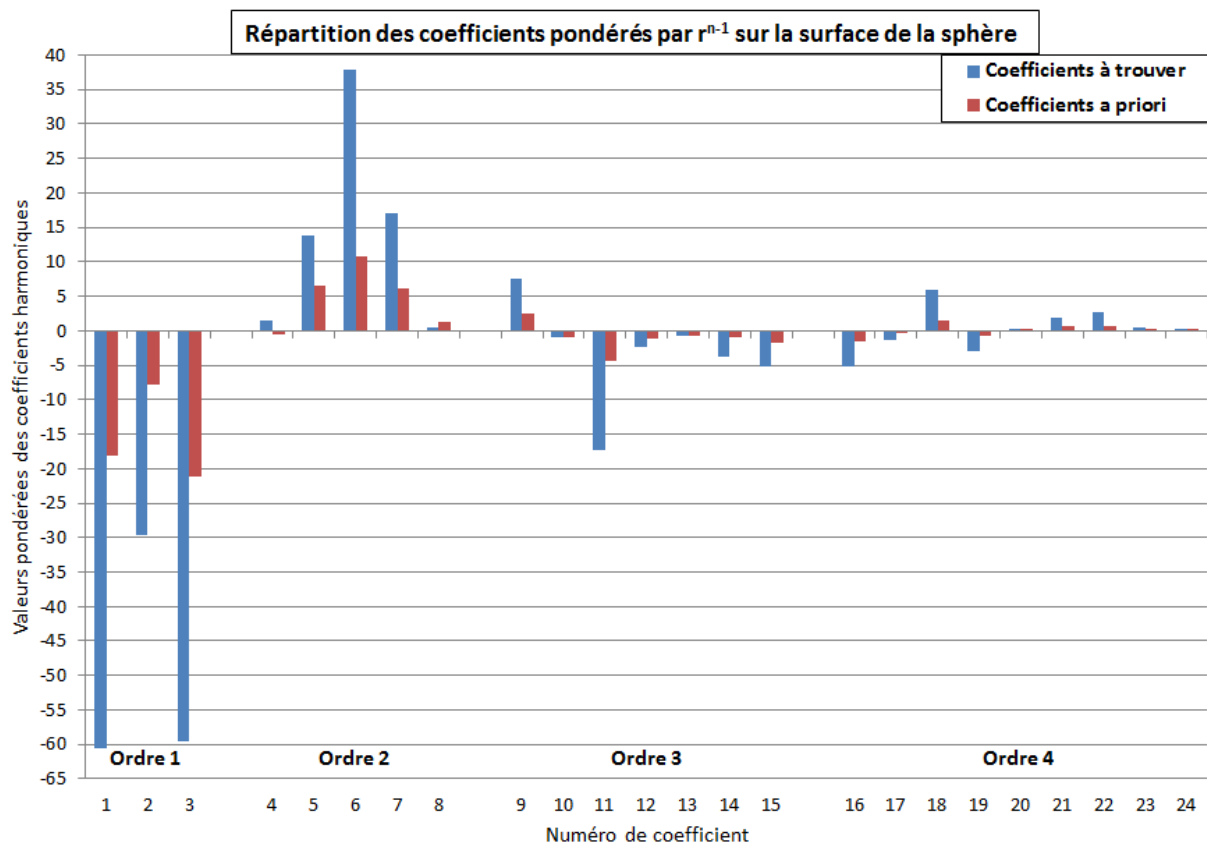


Figure IV.10 : Répartition des coefficients harmoniques (pondérés) des ordres 1 à 4 du modèle a priori et du modèle à étudier

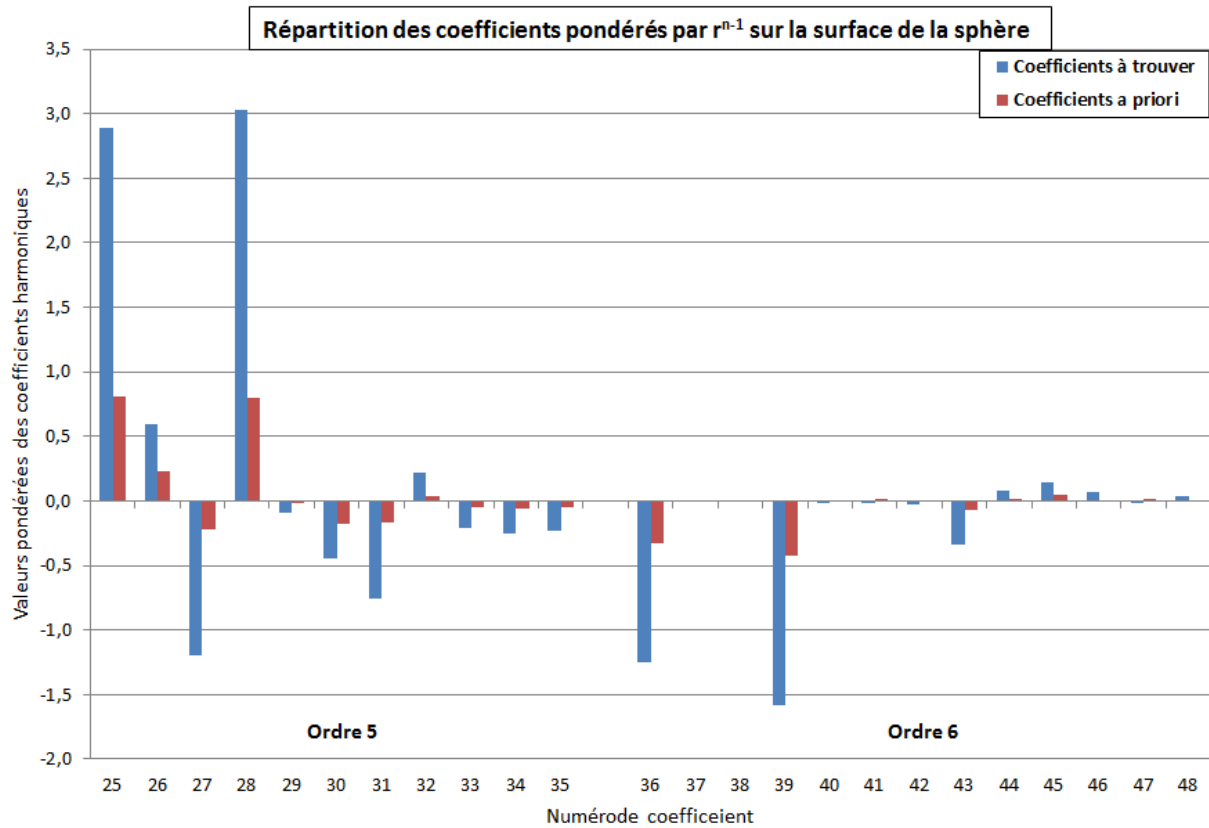


Figure IV.11 : Répartition des coefficients harmoniques (pondérés) des ordres 5 et 6 du modèle a priori et du modèle à étudier

### Etude statistique du modèle a priori

La valeur moyenne de l'information *a priori* (vecteur «  $X_0$  ») a été définie ci-dessus. L'étude statistique faisant varier la géométrie des boucles est alors réalisée afin d'évaluer la matrice de covariance «  $S_0$  ». Comme nous l'avons dit, chaque point définissant les boucles de courant est traité comme une variable aléatoire. Chaque point est défini par trois coordonnées indépendantes dont la valeur moyenne est définie par la géométrie a priori (Figure IV.9). On décide de définir la variance des coordonnées selon les axes X et Y à 20 mm et pour les coordonnées selon l'axe Z à 2 mm. Il paraît important de noter que ces variances ne permettent pas de recréer la boucle de courant (verte) présente sur le modèle étudié (Figure IV.8).

Le modèle à priori est défini par 49 points géométriques, soit 147 paramètres. L'algorithme « Unscented Transform » requiert alors 295 calculs déterministes (selon l'équation (IV.31)) alors que la méthode de Monte Carlo nécessite plusieurs milliers de calculs aléatoires. Les matrices de covariances obtenues par une méthode ou l'autre sont relativement comparables et conduisent au même résultat d'identification <sup>16</sup>.

On obtient donc clairement un gain important du temps de calcul grâce à l'algorithme « Unscented Transform » (environ 7 minutes contre plus de 4 heures avec Monte Carlo).

<sup>16</sup> On pourra se reporter à l'annexe G pour les éléments de comparaison

### IV.3.2. Configuration du problème inverse

L'intérêt de l'approche proposée s'applique aux problèmes inverses sous déterminés. Comme nous l'avons dit plus tôt, l'approximation harmonique du champ à l'ordre 6 est suffisante : Il est donc nécessaire d'identifier 48 coefficients harmoniques.

Seulement 6 capteurs tri-axes sont placés sur la surface de la sphère d'étude (sphère bleue). De plus, pour illustrer le fait que les capteurs ne peuvent être placés n'importe où à cause de contraintes telles que la présence du passager par exemple. Nous proposons une répartition sur la surface de la sphère qui placerait les capteurs proches du siège.

Ces 6 capteurs tri-axes apportent 18 informations et le problème est clairement sous-déterminé. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer l'influence de l'apport d'information a priori pour aider la résolution de ce problème inverse.

L'étude statistique du modèle *a priori* a permis l'évaluation de la matrice de covariance «  $S_0$  ». La matrice de covariance «  $S_m$  » est liée au modèle mathématique et aux mesures. Comme nous l'avons dit, le modèle mathématique est certain et cette matrice est classiquement définie proportionnelle à l'identité avec la variance du bruit de mesure.

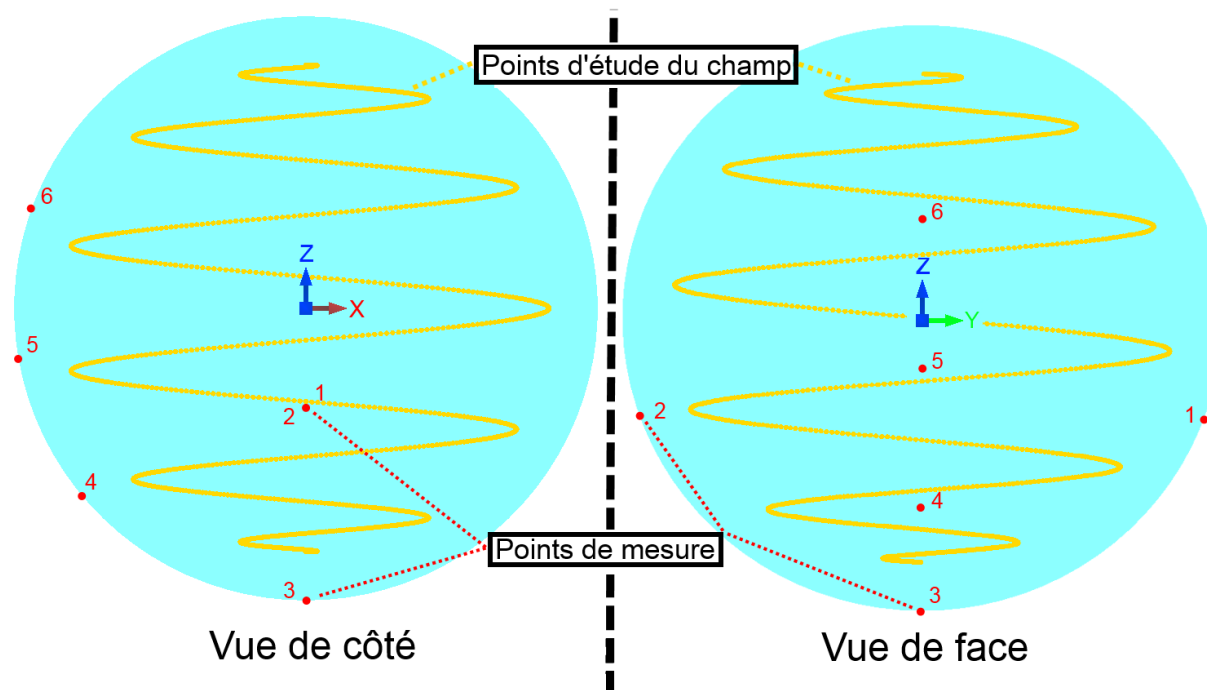


Figure IV.12 : Représentation du positionnement des capteurs

### IV.3.3. Résultats

L'illustration de l'intérêt de l'approche est faite en deux temps : sans bruit de mesure puis avec bruit de mesure.

Le module du champ magnétique obtenu à partir de notre modélisation inverse avec approche statistique est comparé avec le calcul exact. Les coefficients harmoniques sont calculés soit par le maximum de vraisemblance (IV.26) soit par le maximum *a posteriori* (IV.29). Les points de calcul pour la comparaison sont représentés par la ligne jaune sur la Figure IV.12, placée à l'intérieur de la sphère d'identification.

### Sans bruit de mesure

Dans ces conditions, nous définissons arbitrairement le niveau de bruit à  $\pm 5 \times 10^{-16}$  T (valeur très faible au regard des niveaux effectivement mis en jeu, Tableau IV.4). Ceci conduit à la définition de la diagonale de la matrice «  $S_m$  » : c'est-à-dire la variance  $\sigma = 8,333 \times 10^{-32} \text{ T}^2$  (voir l'équation (IV.37) pour le calcul de la variance). Tous les autres termes étant nuls.

La Figure IV.13 compare la répartition des coefficients harmoniques identifiés des ordres 1 à 4, soit par le maximum de vraisemblance (en vert), soit par le maximum *a posteriori* (en rouge), avec la répartition exacte (en bleu) que l'on cherche à obtenir. La Figure IV.14 compare ensuite la répartition des coefficients harmoniques des ordres 5 et 6.

Les valeurs présentées sont pondérées par le terme «  $r^{n-1}$  » lorsque  $r = 0,150\text{m}$  (rayon de la sphère d'étude pour la maquette).

On constate que l'identification des coefficients harmoniques par le maximum *a posteriori* est de meilleure qualité que l'identification faite par le maximum de vraisemblance.

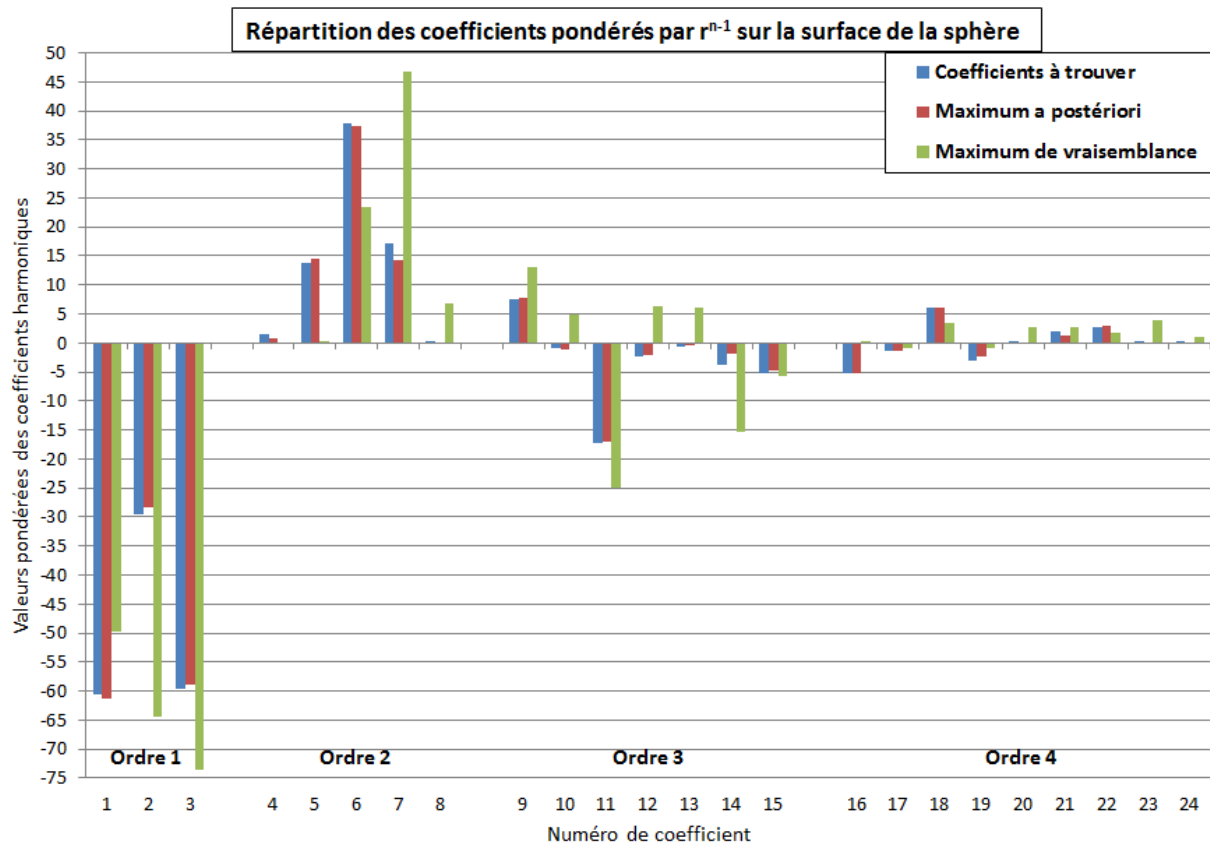


Figure IV.13 : Répartition des coefficients harmoniques (pondérés) exacts et identifiés des ordres 1 à 4

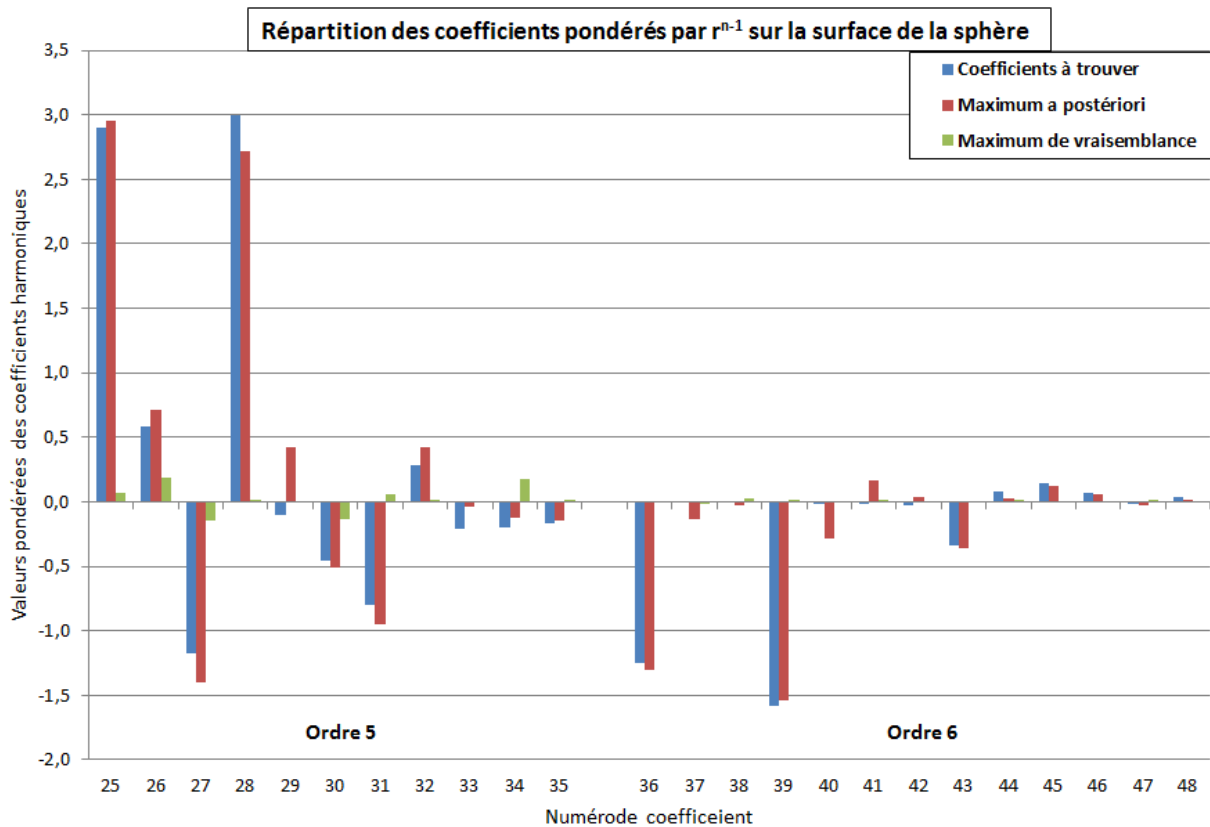


Figure IV.14 : Répartition des coefficients harmoniques (pondérés) exacts et identifiés des ordres 5 et 6

On constate que le maximum *a posteriori* cumule bien l'information portée par les mesures avec l'information *a priori*. En effet, grâce à ces deux sources d'information et en tenant compte de leurs incertitudes, la solution (en rouge) tend vers la répartition exacte (en bleue). Ceci malgré l'écart existant entre le modèle *a priori* (Figure IV.9) et le modèle étudié (Figure IV.8).

Même les ordres 5 et 6 sont très proches de la répartition exacte contrairement à la solution du maximum de vraisemblance (en vert) qui ne tient compte que de l'information mesurée et des incertitudes associées. Par manque d'information, cet estimateur minimise alors les valeurs des coefficients harmoniques de ces ordres afin que la solution soit de norme minimale.

On observe clairement l'apport de l'information *a priori* qui aide la résolution du problème. Il est cependant difficile de conclure sur la validité de l'identification par la seule analyse des coefficients harmoniques obtenus. Nous allons alors étudier la qualité du signal calculé par l'approximation harmonique et la Figure IV.15 présente le module du champ magnétique calculé sur les points de vérification (cf. Figure IV.12).

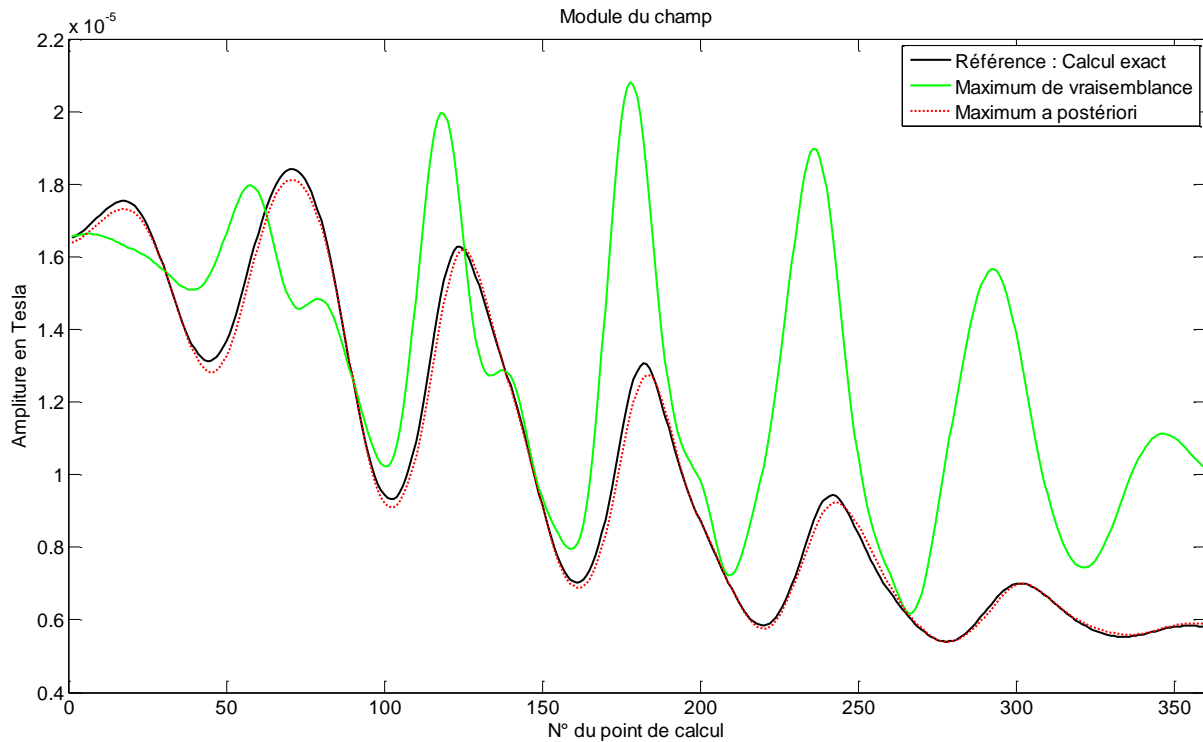


Figure IV.15 : Module du champ calculé sur les points de vérification, valeurs exactes et approchées

Afin d'être encore plus quantitatif dans l'analyse de la qualité d'identification, l'indicateur chiffré de comparaison (IV.35) est alors calculé pour comparer le signal de référence (calcul exact) avec les signaux approchés par les harmoniques sphériques (voir le Tableau IV.3). On indique également l'indicateur chiffré obtenu à partir de l'information *a priori*, illustrant clairement la modification de cette dernière.

	Maximum de vraisemblance ( $X_{MV}$ )	Maximum a posteriori ( $X_{MAP}$ )	Solution a priori ( $X_0$ )
<b>Ecart en % sur le module</b>	13,310	0,039	46,944

Tableau IV.3 : Ecart entre l'approximation harmonique et le calcul exact du champ

Nous venons de voir la validité de l'approche Bayésienne qui couple les informations *a priori* et mesurées dans un problème inverse sous-déterminé. La stabilité de la solution face aux incertitudes de mesures (le bruit) doit maintenant être étudiée.

#### Avec bruit de mesure

Nous appliquons à présent du bruit sur la mesure (notés «  $B_m$  »). La valeur du champ servant d'information « mesurée » pour le problème inverse est alors composée de la valeur exacte (calcul analytique, noté «  $B$  ») à laquelle s'ajoute une valeur aléatoire (notée «  $\xi$  »).

$$B_m = B + \xi \quad (\text{IV.36})$$

Le bruit est créé selon une loi de probabilité uniforme sur la plage  $\pm 600 \times 10^{-9}$  T et l'équation (IV.37) rappelle la variance d'une loi uniforme (notée « U »).

$$f(X) = U(a, b) \rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{a + b}{2} \\ Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12} \end{cases} \quad (IV.37)$$

Chaque axe de mesure est traité de manière indépendante et permet donc de ne compléter que la diagonale de la matrice «  $S_m$  » avec la valeur  $\sigma = 1,2 \times 10^{-13}$  T. Les autres termes de la matrice étant tous nuls.

L'écart type de ce bruit est donc d'environ  $350 \times 10^{-9}$  T. A titre de comparaison, le Tableau IV.4 donne les valeurs mesurées (en  $\times 10^{-9}$  T) sans bruit sur les 6 capteurs virtuels.

Capteur	1	2	3	4	5	6
$B_r \times 10^{-9} T$	-4065	6869	428	-1071	69	2169
$B_\theta \times 10^{-9} T$	-13500	-2364	4886	-3872	-4844	-4068
$B_\phi \times 10^{-9} T$	2840	-2758	-18761	12469	7282	4233

Tableau IV.4 : Valeurs exactes de l'induction prise en compte par le problème inverse non bruité

Pour chaque tirage aléatoire du bruit, le niveau de champ pris en compte par le problème inverse change. Après identification des coefficients, le signal approché est calculé et l'indicateur chiffré évalué. Le Tableau IV.5 résume alors la valeur maximale, minimale et moyenne de l'indicateur chiffré pour le module du champ, obtenu sur 100 tirages aléatoires du bruit défini plus tôt.

	Maximum	Minimum	Moyenne
Maximum de vraisemblance	30,929%	5,370%	15,424%
Maximum a posteriori	0,225%	0,044%	0,124%

Tableau IV.5 : Ecart entre l'approximation harmonique et le calcul exact du module du champ lorsque le bruit perturbe les niveaux mesurés

On constate que l'estimation par le maximum de vraisemblance est très sensible au bruit contrairement au maximum *a posteriori*.

Cela s'explique facilement compte tenu de la définition de la matrice «  $S_m$  ». Cette matrice est définie proportionnelle à l'identité dans ce cas présenté, elle n'a donc aucun effet sur la solution (IV.26) qui est alors directement sensible aux variations des niveaux mesurés pour le problème inverse. A contrario, le maximum *a posteriori* intègre l'influence de cette matrice quelle que soit sa définition et la solution qui est de meilleure qualité, est également plus stable.

### *Discussion sur l'ajout d'éléments ferromagnétiques*

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que les niveaux de champ créés par les sources sont réduits à l'intérieur de l'habitacle grâce à la réaction d'induit des éléments ferromagnétiques (essentiellement le châssis et la carrosserie).

D'un point de vue écriture harmonique de l'induction magnétique, nous avons également vu dans le chapitre précédent que les coefficients sont en effet de valeurs moindres mais pas seulement. L'ordre de l'approximation reste surtout inchangé pour obtenir le même degré de précision à l'intérieur de la zone étudiée.

En admettant que les incertitudes du modèle ne s'appliquent qu'aux conducteurs électriques, si on considère les mêmes variances des paramètres géométriques de ces derniers, la variance du champ à l'intérieur de l'habitacle est alors également réduite. Cela se traduit donc par moins de variation des coefficients harmoniques *a priori* et par conséquent, la matrice de covariance «  $S_0$  » contient des valeurs plus petite et permet donc moins de correction de la solution *a priori* «  $X_0$  » par les niveaux mesurés.

Il apparaît donc l'importance d'avoir le bon niveau de modélisation du système étudié. Pour notre cas d'étude, le modèle *a priori* sans les éléments ferromagnétiques permet une correction plus importante de l'information *a priori* et intègre naturellement l'espace des solutions correspondant à un système possédant de tels éléments ferromagnétiques. Le cas contraire le permet moins et c'est pourquoi il semble inutile de compléter notre modèle *a priori* avec la description de pièces ferromagnétiques.

On peut ainsi concentrer la modélisation sur les éléments actifs (équipements électrotechniques) qui génèrent du champ magnétique et mettre de côté les éléments passifs (réaction d'induit des pièces ferromagnétiques).

Ce résultat demande cependant confirmation selon le cas étudié. En effet, selon la géométrie de ces pièces ferromagnétiques, le champ peut être localement amplifié (effet de pointe) et peut modifier l'ordre de décomposition harmonique.

Cette conclusion s'avère néanmoins fort utile pour notre problème (et tout problème intégrant du ferromagnétisme) car c'est justement cette réaction d'induit qui est lourde en temps de calcul.



## Conclusions intermédiaires

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes méthodes de résolution du problème inverse. Nous avons vu que celui-ci étant majoritairement mal posé et sous-déterminé, la solution n'est pas unique voire hors d'atteinte. Nous nous sommes alors intéressés aux moyens d'apporter de l'information autrement que par la mesure et nous nous sommes orientés vers une approche statistique du problème à résoudre, l'approche Bayésienne.

Grâce à cette approche du problème inverse, nous avons illustré la possibilité d'identifier 48 paramètres (les coefficients harmoniques) avec seulement 18 observations des effets (le nombre de mesure du champ magnétique). Ce résultat plus qu'encourageant est permis grâce à l'apport d'information *a priori*.

Cette information oriente certes la solution mais pas seulement. L'incertitude qui est également définie permet sa modification par les observations. Les observations sont également prises en compte avec une certaine confiance et le résultat global est un compromis tenant compte de toutes ces informations.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont issus de problèmes simulés. Bien qu'ils démontrent la validité et la force de l'approche, il semble néanmoins important de réaliser quelques validations expérimentales sur une maquette de laboratoire. Voici donc tout l'enjeu du dernier chapitre de ce manuscrit.

Chapitre V :

Validations expérimentales

---



## Introduction

Nous nous sommes concentrés dans le chapitre précédent sur le développement de l'approche Bayésienne du problème inverse avec l'aide de modèles numériques. Les mesures de champ magnétique ainsi que le bruit associé ont été simulés et les résultats obtenus sont encourageants. Même si ces derniers confirment l'intérêt de l'approche, il semble absolument essentiel de procéder à une validation expérimentale.

Voici donc l'objectif de ce dernier chapitre qui présente les moyens expérimentaux dont nous avons disposés : c'est-à-dire les outils de mesure de champ ainsi que la maquette développée pour le projet. Après la prise en main de ces éléments (évaluation des incertitudes de mesure et modélisation fine de la maquette), l'approche du problème inverse est validée en tentant de retrouver la valeur du champ magnétique mesuré à l'intérieur d'une zone d'étude.

Les validations expérimentales sont faites sur des boucles de courant seules (aucune pièce ferromagnétique) et une méthodologie de mesure en plusieurs étapes est appliquée afin de réduire le niveau de bruit.

## V.1. Présentation des moyens expérimentaux

### V.1.1. Les moyens de mesure et d'acquisition

Les niveaux de champ sont mesurés par l'intermédiaire de magnétomètres Fluxgate de marque Bartington®. Une partie d'entre eux est dédiée à la mesure de champ pour le problème inverse (Mag-3IE) et une autre partie sert de points de vérification (Mag-3MSES) pour valider la qualité de l'identification. On donne les principales caractéristiques (tirées de la documentation technique<sup>17</sup>) des magnétomètres utilisés pour l'identification (Figure V.1) et des magnétomètres utilisés pour la vérification (Figure V.2). Les capteurs utilisés pour l'identification sont placés en périphérie de la zone étudiée et les capteurs utilisés pour la vérification sont placés à l'intérieur de cette zone.

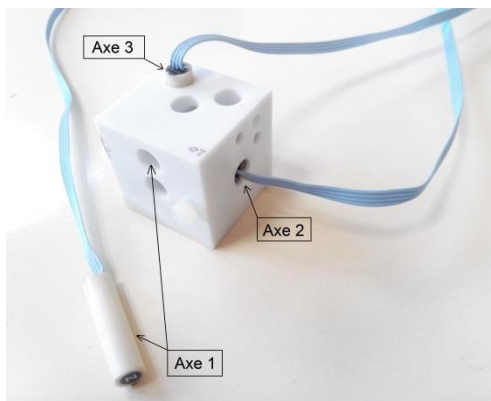


Figure V.1 : Magnétomètre Fluxgate (Mag-3IE) à 3 axes indépendants de mesure placés dans un cube métrologique et principales caractéristiques

Extrait des caractéristiques	
Nombre d'axe	3 indépendants
Plage de mesure	$\pm 100 \mu\text{T}$
Bande passante	3kHz
Niveau de bruit	$< 10 \text{pT}/(\text{Hz})^{1/2}$ @ 1Hz
Erreur d'alignement	$< 3,5^\circ$



Figure V.2 : Magnétomètre Fluxgate (Mag-3MSES) « pour référence » et principales caractéristiques

Extrait des caractéristiques	
Nombre d'axe	3 orthogonaux
Plage de mesure	$\pm 100 \mu\text{T}$
Bande passante	3kHz
Niveau de bruit	$< 6 \text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ @ 1Hz
Erreur d'orthogonalité	$< 0,1^\circ$
Erreur d'alignement (axe Z en référence)	$< 0,1^\circ$

Les trois axes de mesure des capteurs utilisés pour l'identification sont indépendants (Mag-3IE). Ils sont alors placés à l'intérieur d'un cube « métrologique » (Figure V.1 à gauche). Les cubes sont ensuite placés sur une platine « quadrillée » ou matrice (Figure V.3) afin de bien maîtriser le positionnement des points de mesure. Ces éléments ont été développés pour de précédents travaux de recherche et sont régulièrement exploités depuis.

<sup>17</sup> <http://www.bartington.com/Literaturepdf/Datasheets/Mag-03%20DS0013.pdf>



Figure V.3 : Cubes métrologiques, contenant les axes de mesure, placés sur la platine de support

Tous les capteurs retournent un signal analogique que l'on numérise (fréquence d'échantillonnage  $f_e = 11$  kHz) par l'intermédiaire d'une baie d'acquisition de marque National Instrument (PXI 1072Q<sup>18</sup>). Cet outil est en réalité un PC de mesure équipé de plusieurs cartes de conversion analogique-numérique contrôlées par le logiciel LabVIEW®. La « programmation » permet alors de créer un outil d'acquisition, de visualisation et d'enregistrement des données que nous traiterons ensuite pour le problème inverse.

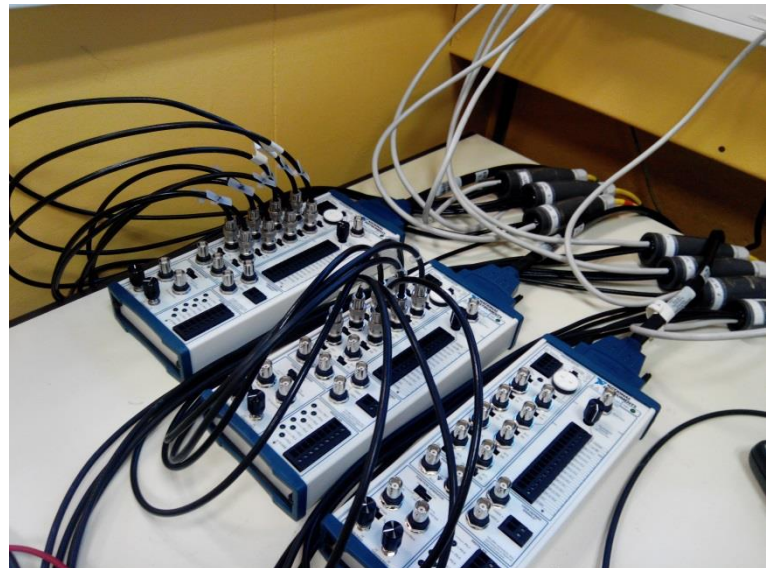
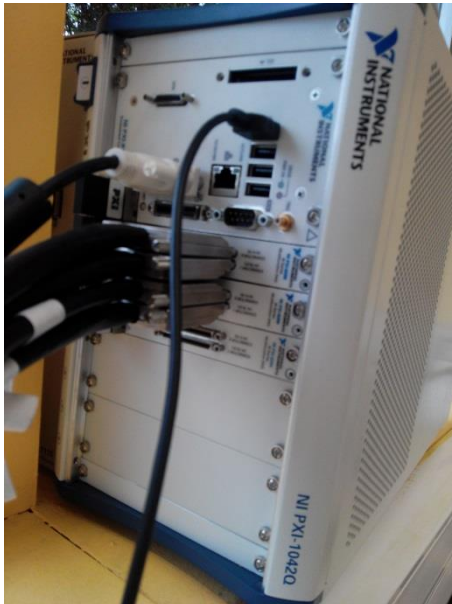


Figure V.4 : Baie d'acquisition des données (à gauche) et baie de connexion des capteurs (à droite)

---

<sup>18</sup> <http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/fr/nid/13909>

### V.1.2. La description de la maquette

Un modèle numérique simplifié des boucles de courant a été présenté dans le chapitre précédent (Figure IV.5). A partir de ce modèle, nous avons réalisé une maquette (Figure V.5) à l'échelle (1:2) par rapport au véhicule étudié : c'est-à-dire que le plateau de la maquette mesure 180 cm de long par 80 cm de large et que le circuit électrique mesure quant à lui 160 cm de long sur 50 cm de large.

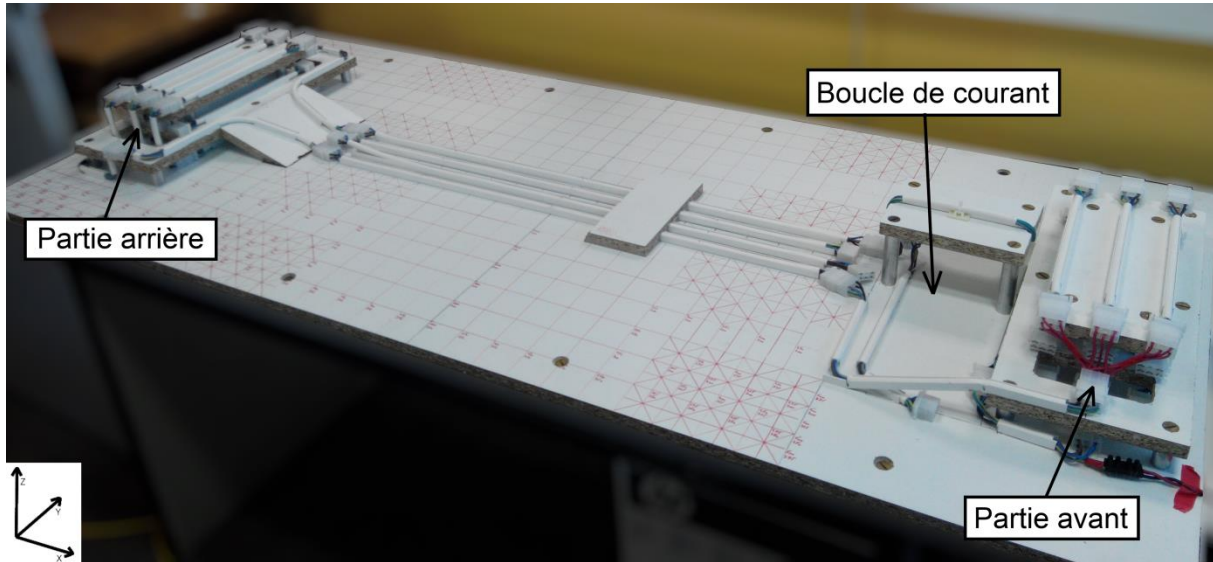


Figure V.5 : Réalisation expérimentale des boucles de courant

Cette maquette permet plusieurs configurations maîtrisées des boucles de courant grâce à un jeu de connecteurs qui permettent la modification géométrique des boucles. Les modifications permises sont les suivantes :

- Les trois câbles de la partie arrière ou avant sont connectés en parallèle et forment donc trois boucles parallèles dans le plan vertical. La dimension de ces boucles peut être réduite de moitié.
- L'écart entre l'aller et le retour du courant (reliant la partie arrière à la partie avant) peut varier du simple au double.
- La boucle de courant présente à l'avant peut être supprimée pour retrouver la configuration du modèle *a priori*.

## V.2. Prise en main des outils expérimentaux

### V.2.1. Positionnement des capteurs

Nous avons vu plus tôt que les capteurs sont placés sur une platine « quadrillée » afin de maîtriser leur placement le placement des capteurs sur celle-ci. La matrice est réglable en hauteur mais il faut surtout maîtriser le placement de cette dernière par rapport aux boucles de courant.



Un repérage a alors été tracé sur le plateau de la maquette (lignes rouges sur la Figure V.5) afin de pouvoir connaître la position relative de la platine. La partie horizontale de la platine est équipée de deux pointes (une pointe par angle et deux angles équipés) afin de pouvoir repérer la position des capteurs par rapport à ce repérage général (voir la Figure V.6).

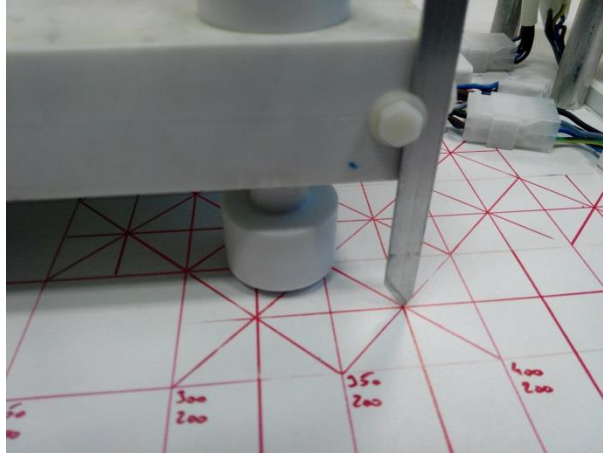


Figure V.6 : Pointe de repérage de la platine sur le repère général de la maquette

### V.2.2. Evaluation des incertitudes de mesure

Comme nous l'avons indiqué plus tôt, les capteurs utilisés pour l'identification ont leurs trois axes de mesures indépendants. Les cubes « métrologiques » ont été développés pour de précédents travaux de recherche afin de recréer une base orthogonale de mesure. Ces cubes sont qualifiés de métrologiques car leurs dimensions sont maîtrisées et nous sommes donc capables de définir la position des axes de mesures avec une précision inférieure au millimètre. Cependant, comme indiqué par le Tableau de la Figure V.1 (extrait des caractéristiques), le mésalignement de l'axe du noyau de mesure par rapport au support mécanique (le cylindre contenant la tête de mesure) est donnée inférieure à  $\theta < 3,5^\circ$ .

La Figure V.7 illustre la position réelle de l'axe de mesure. Celui-ci est mésaligné d'un angle  $\theta$  à l'intérieur du cylindre, lui-même orienté d'un angle  $\varphi$  autour de son axe principal, l'axe théorique de mesure.

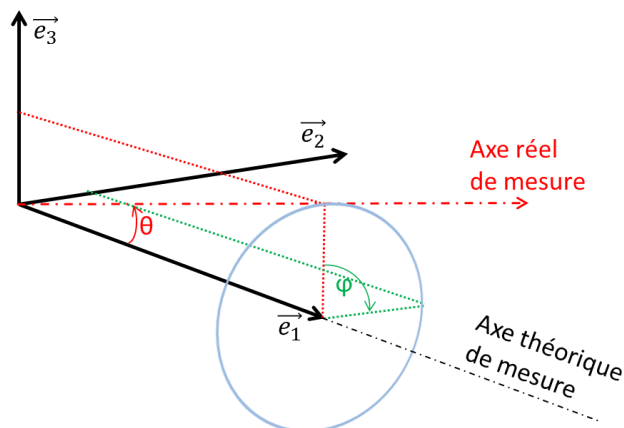


Figure V.7 : Schéma d'illustration de l'orientation réelle de l'axe de mesure



L'équation (V.1) décrit la mesure effectuée en fonction du mésalignement  $\theta$  et de la rotation  $\varphi$  d'un cylindre contenant le noyau de mesure.

$$B_{mesure} \cdot \vec{e}_1 = \cos(\theta) \cdot B_1 \cdot \vec{e}_1 + \sin(\theta) \sin(\varphi) \cdot B_2 \cdot \vec{e}_2 + \sin(\theta) \cos(\varphi) \cdot B_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (\text{V.1})$$

On remarque alors que la valeur du champ selon l'axe théorique ne peut pas être directement mesurée à cause du terme «  $\cos(\theta)$  », aussi appelé le gain de mesure. On note également l'influence des autres composantes du champ à cause des termes «  $\sin(\theta)\sin(\varphi)$  » et «  $\sin(\theta)\cos(\varphi)$  ». En admettant l'angle maximal  $\theta < 3,5^\circ$ , le terme  $\cos(\theta) > 0,998$  et le terme  $\sin(\theta) < 0,061$ . On aperçoit donc l'importance de la projection du champ perpendiculaire à l'axe de mesure sur ce dernier. Imaginons que le champ selon l'axe soit faible et que le champ dans le plan perpendiculaire soit fort : jusqu'à 6 % de la valeur de ce dernier peut alors être projetée sur l'axe de mesure.

Dans l'idéal, il faudrait positionner définitivement les cylindres de mesures dans le cube « métrologique » et évaluer une matrice de correction  $\{3 \times 3\}$ . Celle-ci contient les termes présentés dans l'équation (V.1) pour chacun des axes de mesure. Elle s'obtient assez simplement en plaçant le cube dans un champ homogène contrôlé (à l'intérieur d'une bobine de Helmholtz par exemple).

Cela requiert cependant beaucoup de temps et nous ne nous sommes concentrés que sur l'évaluation de l'angle  $\theta$  (valeur maximale inférieure à  $3,5^\circ$ ) afin de quantifier l'erreur maximale de la mesure. Pour l'évaluation de cet angle, nous avons mis en place le système de mesure présenté par la Figure V.8 afin de nous servir du champ magnétique homogène qui nous entoure tous, le champ magnétique terrestre. Celui-ci est mesuré de part et d'autre du capteur sous test par les magnétomètres Mag-3MSES présentés en Figure V.2. Comme l'indique les caractéristiques présentées (Figure V.2), les axes de mesures de ces derniers sont positionnés avec beaucoup plus de précision (erreur inférieure à  $0,1^\circ$ ) et le niveau de bruit est plus faible : c'est pourquoi nous nous en servons comme référence. Ils permettent donc de connaître les composantes du champ magnétique terrestre dans le repère orthogonal du capteur.

Le test consiste à placer l'axe de mesure sous test à la verticale entre les deux capteurs de référence puis de le faire tourner sur lui-même (selon l'axe théorique). On observe alors une variation de l'amplitude qui est proportionnelle (facteur  $\sin(\theta)$ ) au module du champ dans le plan perpendiculaire à l'axe :  $B_{\perp} = (B_2^2 + B_3^2)^{1/2}$ .

Nous avons testé ainsi 8 magnétomètres Mag-3IE et parmi les 24 axes de mesure, l'angle maximum obtenu est d'environ  $2,9^\circ$ , l'angle minimum est d'environ  $0,6^\circ$  et il est en moyenne d'environ  $1,7^\circ$ . En d'autres termes, la mesure effectuée selon l'axe d'un capteur est potentiellement modifiée en moyenne par 3 % de la valeur du module du champ dans le plan perpendiculaire.



Figure V.8 : Configuration des capteurs pour l'évaluation de l'erreur d'alignement interne de l'axe de mesure

### V.2.3. Modélisation de la maquette

Afin d'être certain du positionnement des capteurs et donc du niveau de champ mesuré, un modèle des boucles de courant est réalisé afin de pouvoir comparer la simulation à la mesure.

Il est important de noter que ce modèle ne servira en aucun cas pour valider l'approche du problème inverse proposé. Ce travail permet seulement la prise en main de la source que nous allons étudier.

Le développement du modèle est arrêté lorsque l'écart entre le modèle et la mesure est inférieur à l'erreur de mesure due au mésalignement des axes des capteurs (c'est-à-dire autour de 3 % d'écart). Ce travail est itératif : on modélise de plus en plus de détails géométriques mesurés sur la maquette de sorte que le champ magnétique simulé corresponde à celui mesuré par les capteurs.

Ce travail nous conduit de nouveau à la conclusion du second chapitre de ce mémoire : s'il est toujours possible de développer un modèle précis d'un système, cela requiert beaucoup de temps (ici plusieurs jours) et le résultat est totalement dépendant de l'observation. En somme, cette démarche n'est en aucun cas applicable dans un contexte plus industriel et confirme l'intérêt de l'approche proposée.

Celle-ci couple modèle *a priori* et mesure dans une approche statistique du problème inverse afin d'identifier tous les paramètres nécessaires à la description des phénomènes.

La Figure V.9 illustre enfin le niveau de détail atteint pour la description des boucles de courant de la partie arrière (à gauche) et de la partie avant (à droite).

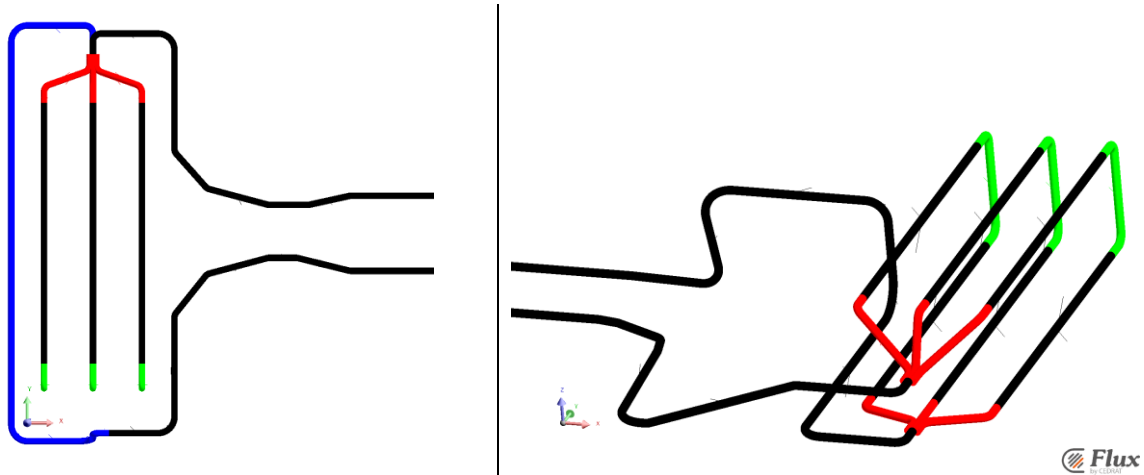


Figure V.9 : Modèle « calé » des boucles de courant de la maquette, partie arrière à gauche et partie avant à droite

## V.3. Résultats expérimentaux

### V.3.1. Protocole de mesure et hypothèses

#### *Protocole de mesure*

On commence bien évidemment par choisir la configuration des boucles de courant puis on place les capteurs. Ceci fait, chaque essai consiste alors en l'acquisition du signal des magnétomètres pendant 15 secondes.

Ces d'enregistrement (à 11 kHz) contiennent trois états distincts du système :

- Pendant les 5 premières secondes, le champ magnétique est mesuré lorsqu'aucun courant électrique ne circule dans les boucles : le système étudié est éteint (OFF).
- Pendant les 5 secondes suivantes, la mesure du champ magnétique est réalisée lorsque le courant électrique (connu et maîtrisé) circule dans les boucles : le système étudié est en mode de marche (ON).
- Pendant les 5 dernières secondes, champ magnétique est mesuré lorsque, de nouveau, le courant ne circule pas dans les boucles : le système étudié est éteint.

Sur chaque fenêtre temporelle de 5 secondes, le signal ne devrait pas trop varier en valeur moyenne. Si c'est le cas, on calcule alors la valeur moyenne du champ mesuré pour chacun des états présentés du système. Cela permet de minimiser l'influence du bruit intrinsèque des capteurs et d'une partie du bruit environnemental (environ  $\pm 50 \times 10^{-9} \text{T}$ ).

Les 5 secondes de départ et de fin de l'enregistrement permettent de vérifier que l'environnement magnétique n'a pas changé pendant l'essai. Afin d'obtenir la valeur du champ magnétique effectivement créé par les boucles de courant et s'affranchir de l'état magnétique de l'environnement, on calcule l'écart entre l'état « ON » (mode de marche normale avec du courant en circulation) et l'état « OFF » (pas de courant en circulation) du système. Pour terminer, chaque essai est réalisé plusieurs fois afin de valider les niveaux obtenus et les insérer dans le problème inverse.

### Hypothèses de mesure

Le protocole de mesure permet de placer l'étude dans un cas avec peu de bruit et ainsi la variance est définie comme dans le chapitre précédent avec l'illustration numérique sans bruit : la diagonale de la matrice de covariance «  $S_m$  » vaut alors  $\sigma = 8,333 \times 10^{-32} T^2$  (niveau de bruit arbitrairement défini à  $\pm 5 \times 10^{-16} T$ ).

Le cube métrologique recrée un repère orthogonal d'étude mais les axes de mesure sont nécessairement séparés de quelques millimètres. En considérant que la variation du champ est suffisamment faible sur cette distance, il est tout à fait valable de ne définir qu'un seul point pour la mesure des trois axes. Pour chaque magnétomètre Mag-3IE, nous avons évalué plus tôt l'angle principal ( $\theta$ ) caractérisant le mésalignement de l'axe de mesure (angle donné inférieur à  $3,5^\circ$  dans la documentation technique) : le repère de mesure n'est alors pas orthonormé. Malgré cette caractéristique, les mesures ne sont pas corrigées avant d'être insérées dans le problème inverse.

Rappelons que dans l'idéal, il faudrait évaluer la matrice de correction  $\{3 \times 3\}$  pour pleinement corriger cette erreur de mesure et observer son influence sur la qualité d'identification. Ce travail n'a malheureusement pas pu être mis en œuvre.

### V.3.2. Système mesuré et information *a priori*

#### Système mesuré

Comme nous l'avons dit, la maquette réalisée permet différentes configurations des boucles de courant. Cependant, seule une configuration ne sera étudiée : celle déjà présentée à la fin du chapitre précédent et rappelée par la Figure V.10. La réalisation expérimentale de cette configuration conduit donc à la même richesse harmonique (ordre 6) pour la description du champ magnétique à l'intérieur de la sphère bleue, représentant la position du passager avant du véhicule.

L'objectif consiste donc dans l'identification des 48 coefficients harmoniques permettant la description du champ partout à l'intérieur de cette sphère.

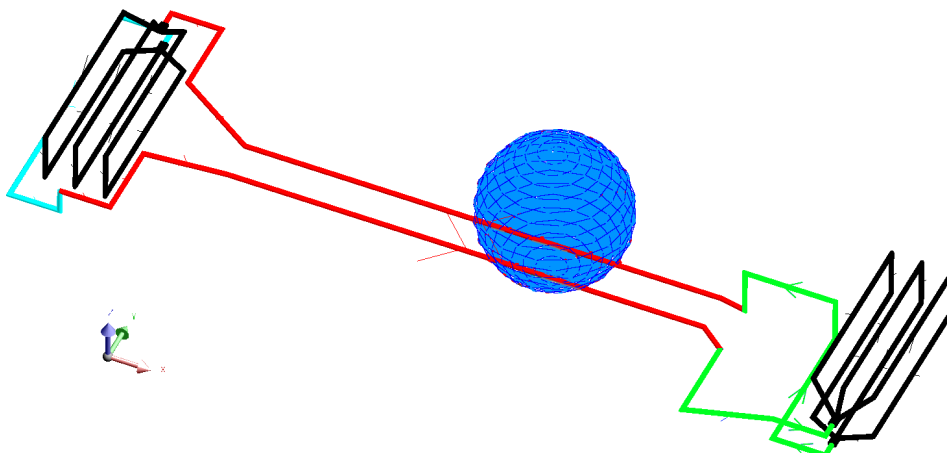


Figure V.10 : Représentation de la configuration des boucles de courant dont on mesure le champ généré

### Information *a priori*

Elle est constituée d'un jeu de coefficients harmoniques accompagné d'une matrice de covariance définissant l'intervalle de confiance de cette solution *a priori*. Ces informations proviennent du modèle *a priori* (Figure V.11) qui est identique à celui déjà présenté dans le chapitre précédent.

Rappelons les principales différences de ce modèle *a priori* avec la configuration mesurée (Figure V.10) : les câbles sont fortement rapprochés les uns des autres et entraîne la suppression de la boucle de courant à l'avant de l'habitacle (en vert sur la Figure V.10).

Notons que cette configuration *a priori* génère moins de champ magnétique que la configuration réalisée pour les mesures.

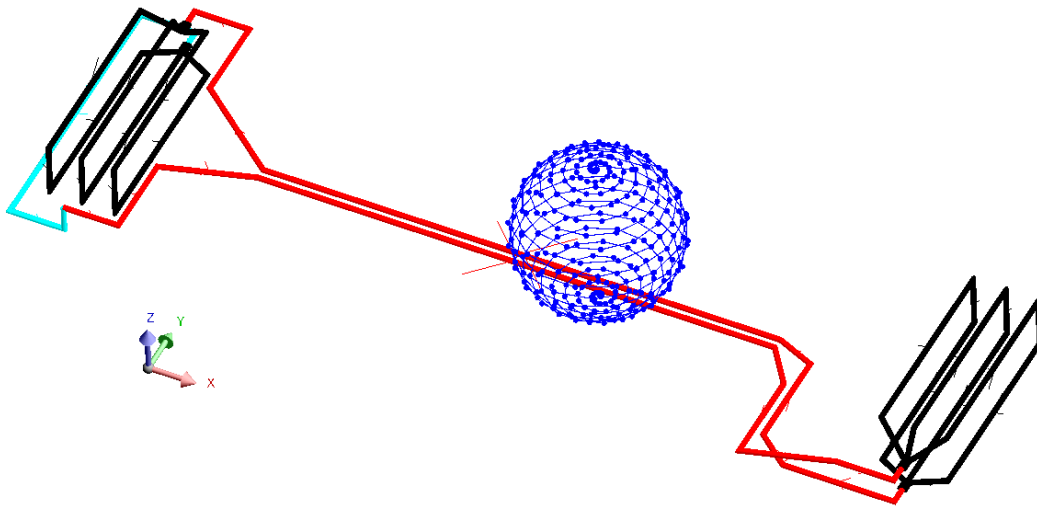


Figure V.11 : Modélisation de la configuration *a priori* des boucles de courant dont on étudie le champ généré

### V.3.3. Mesures proches de la sphère d'étude

Sur un rayon  $r = 0,150$  m pour la maquette, nous disposons de 8 capteurs tri-axes (Mag-3IE numérotés de 1 à 8 sur la Figure V.12) pour l'identification des coefficients harmoniques. La mesure apporte donc 24 informations pour l'identification de 48 coefficients harmoniques soit par l'estimateur du maximum de vraisemblance (noté MV), soit par l'estimateur du maximum *a posteriori* (noté MAP).

Après identification, les coefficients harmoniques obtenus permettent le calcul du champ magnétostatique approché sur les points de vérification (magnétomètres Mag-3MSES, notés A (bas du buste) et B (tête) sur la Figure V.12). Pour être plus précis, l'approximation de chaque composante du champ est calculée dans le repère du capteur de vérification (coordonnées cartésiennes).

Pour cette première validation expérimentale, nous mettons en œuvre le nombre maximum de magnétomètres que nous avons à disposition pour l'identification.

Cette première configuration a pour objectif d'illustrer la validité de l'approche en répartissant de la meilleure façon possible les capteurs sur la surface de la sphère qui délimite la zone d'étude du champ magnétique.

Il est important de noter que les platines de positionnement des capteurs ne permettent que trois plans de mesure et ainsi la Figure V.12 présente la répartition proposée pour être au plus près de la sphère d'étude. Ainsi, contrairement aux illustrations numériques du chapitre précédent, nous ne mesurons plus les composantes sphériques du champ dans le repère d'étude mais les composantes cartésiennes.

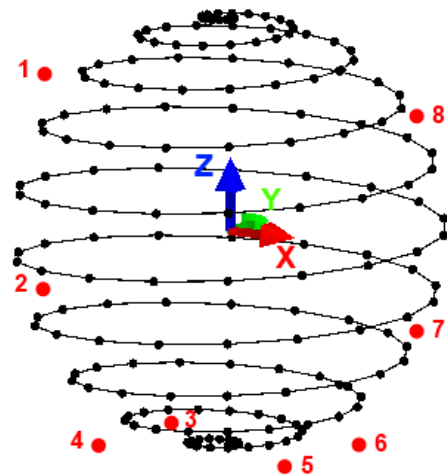
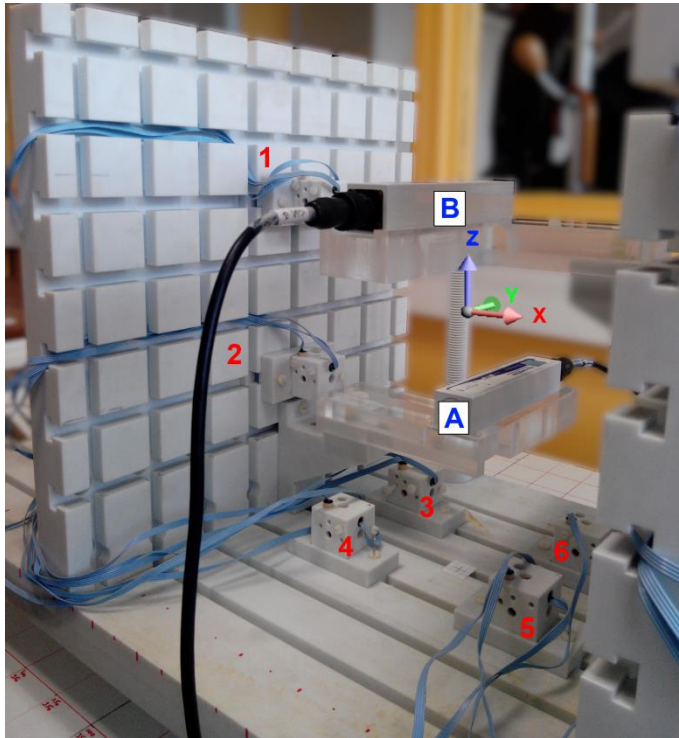


Figure V.12 : Placement des capteurs proches de la sphère d'étude

La Figure V.13 présente la répartition des coefficients harmoniques (pondérés par le terme  $r^{n-1}$  lorsque  $r = 0,150$  m) identifiés par l'estimateur MV ou MAP. On constate en effet une différence entre les deux solutions, notamment pour les coefficients des ordres 5 et 6. L'influence de ces coefficients est naturellement réduite par le maximum de vraisemblance qui, en l'absence d'information, retourne la solution de norme minimale.

Il est cependant difficile de conclure sur la qualité de l'identification par la seule analyse des coefficients harmoniques identifiés : d'autant plus que nous n'avons pas la répartition « exacte » à trouver comme dans le chapitre précédent.

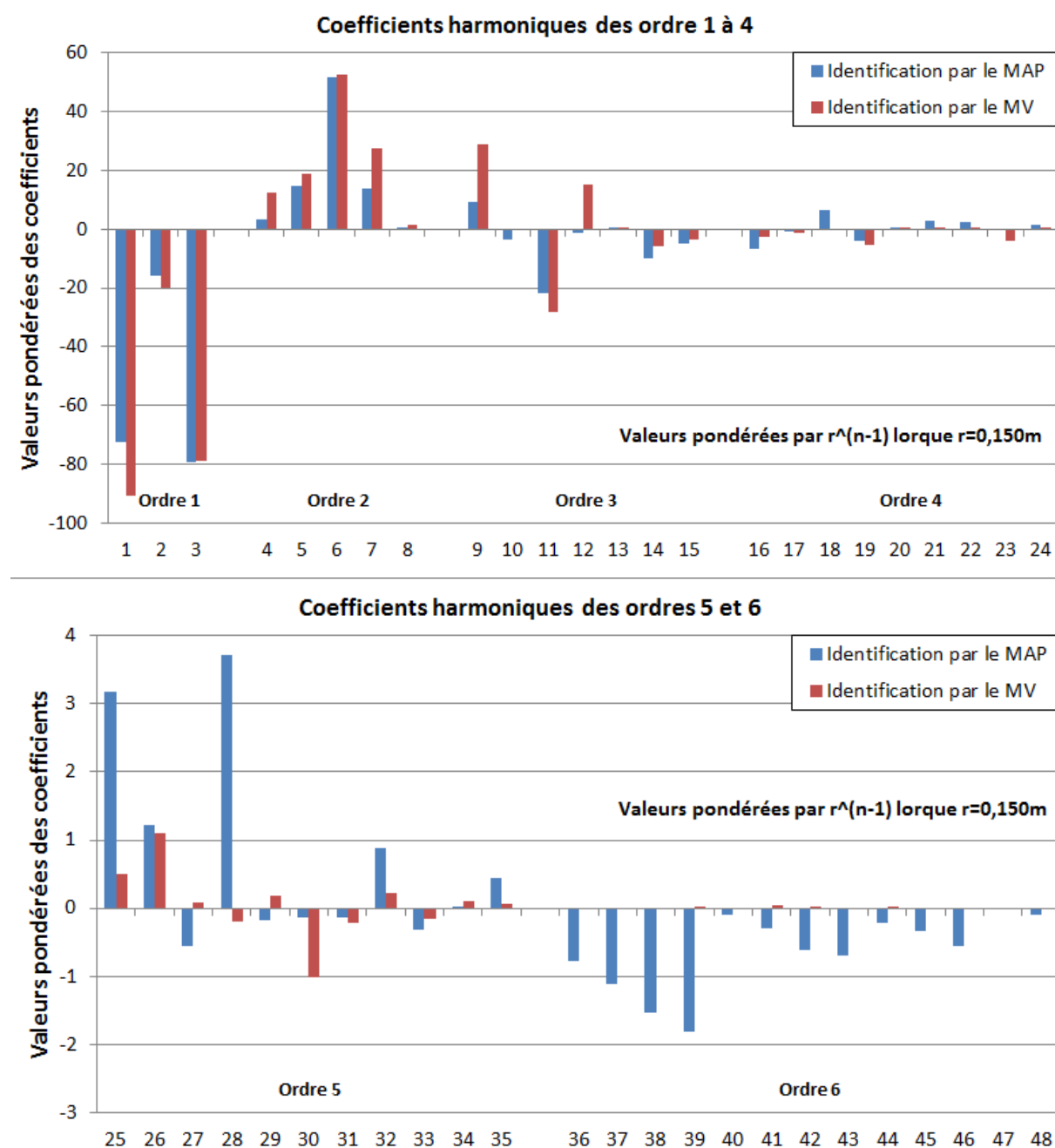


Figure V.13 : Répartition des coefficients harmoniques (pondérés) identifiés lorsque 8 capteurs tri-axes sont placés à proximité de la sphère d'étude

Le calcul de l'approximation des composantes du champ magnétique est alors comparé avec les composantes mesurées par les capteurs de vérification. La position de ces capteurs est donnée par la Figure V.16 (points bleus).

La Figure V.14 donne le module du champ magnétique en ces points. La solution *a priori* est également calculée sur ces points afin de démontrer que celle-ci est bien modifiée par l'information provenant des mesures.



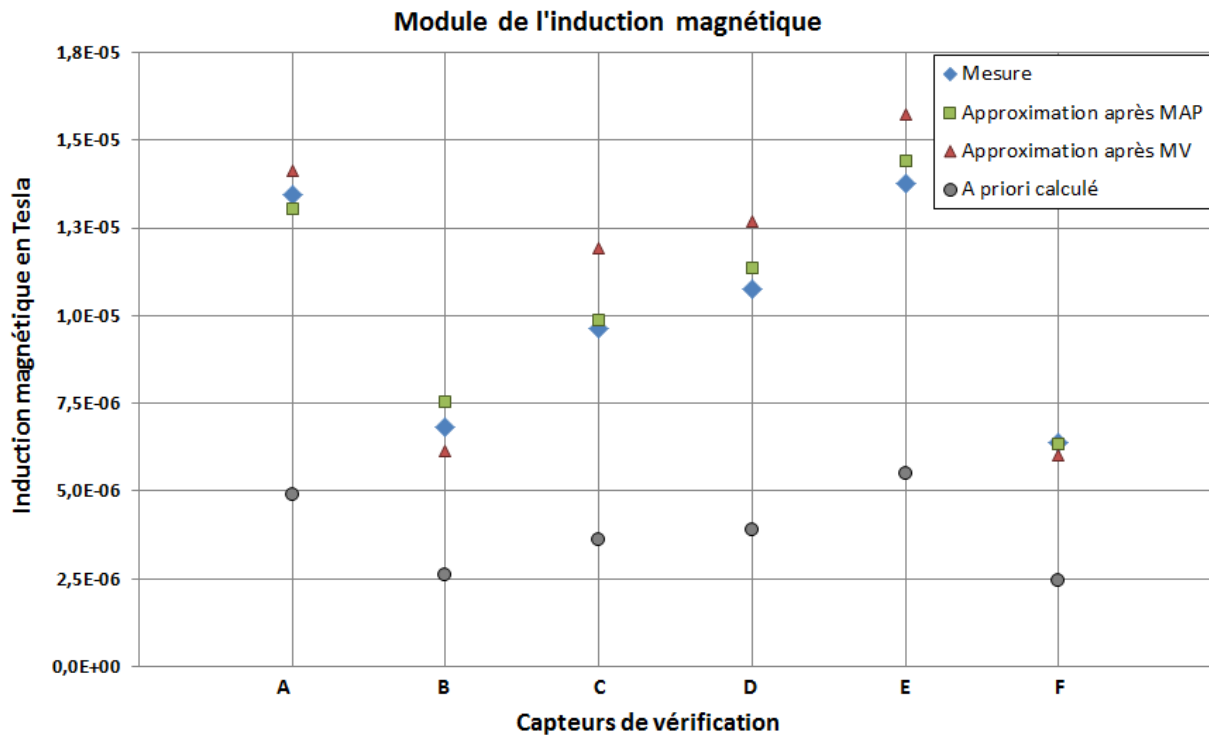


Figure V.14 : Module du champ sur les points de vérification :  
valeurs approximées a posteriori lorsque les capteurs d'identification sont proches de la sphère d'étude

On constate en effet que l'approximation du champ avec les coefficients obtenus par le MAP est bien plus proche des mesures qu'avec les coefficients obtenus par le MV.

Ceci est tout à fait naturel car tous les coefficients jusqu'à l'ordre 6 sont nécessaires alors que l'estimateur MV ne peut pas identifier au-delà de l'ordre 4. L'estimateur MAP parvient à un meilleur résultat grâce à l'information *a priori*. Cette information est d'ailleurs bien modifiée par l'apport des mesures.

Cependant, afin que l'étude soit plus complète et objective, il est important d'avoir un indicateur chiffré pour comparer les composantes du champ dans le repère capteur. La comparaison consiste dans le calcul de l'écart entre la composante mesurée « *mesure* » et la composante approchée « *approximation* » selon l'équation (V.2).

$$Ecart = 100 * \frac{(approximation - mesure)}{mesure} \quad (V.2)$$

Le Tableau V.1 recense alors les écarts obtenus et indique les niveaux mesurés en Tesla. Ce Tableau illustre de manière chiffrée que le module du champ identifié est meilleur avec l'estimateur MAP plutôt qu'avec l'estimateur MV. En se concentrant uniquement sur les composantes prépondérantes du champ de chaque capteur, l'analyse confirme que l'estimateur MAP conduit effectivement à de meilleurs résultats.



	<b>Composante X</b>	<b>Composante Y</b>	<b>Composante Z</b>	<b>Module</b>	<i>Estimateurs</i>
<b>Point A</b>	$-3,620 \times 10^{-6}$	$-9,996 \times 10^{-6}$	$8,216 \times 10^{-6}$	$13,440 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-32,1</b>	<b>13,9</b>	<b>-29,0</b>	<b>-3,0</b>	<b>MAP</b>
	-16,6	15,0	-6,9	5,2	MV
<b>Point B</b>	$-1,329 \times 10^{-6}$	$-3,340 \times 10^{-6}$	$5,785 \times 10^{-6}$	$6,811 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-77,5</b>	<b>13,7</b>	<b>12,7</b>	<b>10,9</b>	<b>MAP</b>
	-118,1	46,6	-36,3	-10,0	MV
<b>Point C</b>	$-2,680 \times 10^{-6}$	$-7,792 \times 10^{-6}$	$5,395 \times 10^{-6}$	$9,614 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-58,8</b>	<b>10,3</b>	<b>-2,2</b>	<b>2,6</b>	<b>MAP</b>
	-39,8	23,5	35,9	23,9	MV
<b>Point D</b>	$-2,534 \times 10^{-6}$	$-4,987 \times 10^{-6}$	$9,178 \times 10^{-6}$	$10,750 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-56,2</b>	<b>26,5</b>	<b>2,0</b>	<b>5,6</b>	<b>MAP</b>
	-29,8	0,5	25,7	18,2	MV
<b>Point E</b>	$-5,274 \times 10^{-6}$	$-6,904 \times 10^{-6}$	$10,670 \times 10^{-6}$	$13,760 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-12,7</b>	<b>16,6</b>	<b>3,3</b>	<b>4,7</b>	<b>MAP</b>
	5,1	5,7	20,0	14,4	MV
<b>Point F</b>	$-0,621 \times 10^{-6}$	$-3,527 \times 10^{-6}$	$5,305 \times 10^{-6}$	$6,400 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-68,3</b>	<b>-2,6</b>	<b>0,2</b>	<b>-1,0</b>	<b>MAP</b>
	-68,3	-217,9	-18,1	-6,0	MV

**Tableau V.1 : Ecart en % entre le signal mesuré et le signal approché après identification  
avec 8 capteurs tri-axes proches de la sphère d'étude**

Ces premiers résultats expérimentaux confirment bien que l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) conduit à une meilleure identification des paramètres que le maximum de vraisemblance (MV) pour un problème inverse sous déterminé.

Nous avons cependant relevé dans le chapitre précédent que la présence du passager interdit certaines positions des capteurs pour l'identification. Le paragraphe suivant présente alors les résultats obtenus en tenant compte de cette contrainte.

### V.3.4. Mesures éloignées de la sphère d'étude

Pour tenir compte des contraintes de placement des capteurs, nous avons alors fait le choix de placer les 8 magnétomètres tri-axes (Mag-3IE) sur deux plans perpendiculaires (à l'aide des matrices de positionnement) afin de faire comme s'ils étaient dans le siège du passager (voir la Figure V.15).

Notons que cette répartition est en aucun cas optimisée et que le siège ainsi considéré est non magnétique contrairement à l'armature réelle que nous avons pu étudier dans le second chapitre de ce manuscrit. Comme précédemment, les coefficients harmoniques identifiés permettront le calcul *a posteriori* de l'approximation du champ sur les points de vérification.

### Configuration n°1 : 8 capteurs tri-axes

La Figure V.15 illustre la répartition proposée des 8 magnétomètres pour simuler leur positionnement supposé dans le siège du passager avant du véhicule et la Figure V.16 illustre le placement des capteurs pour la vérification de la qualité d'identification.

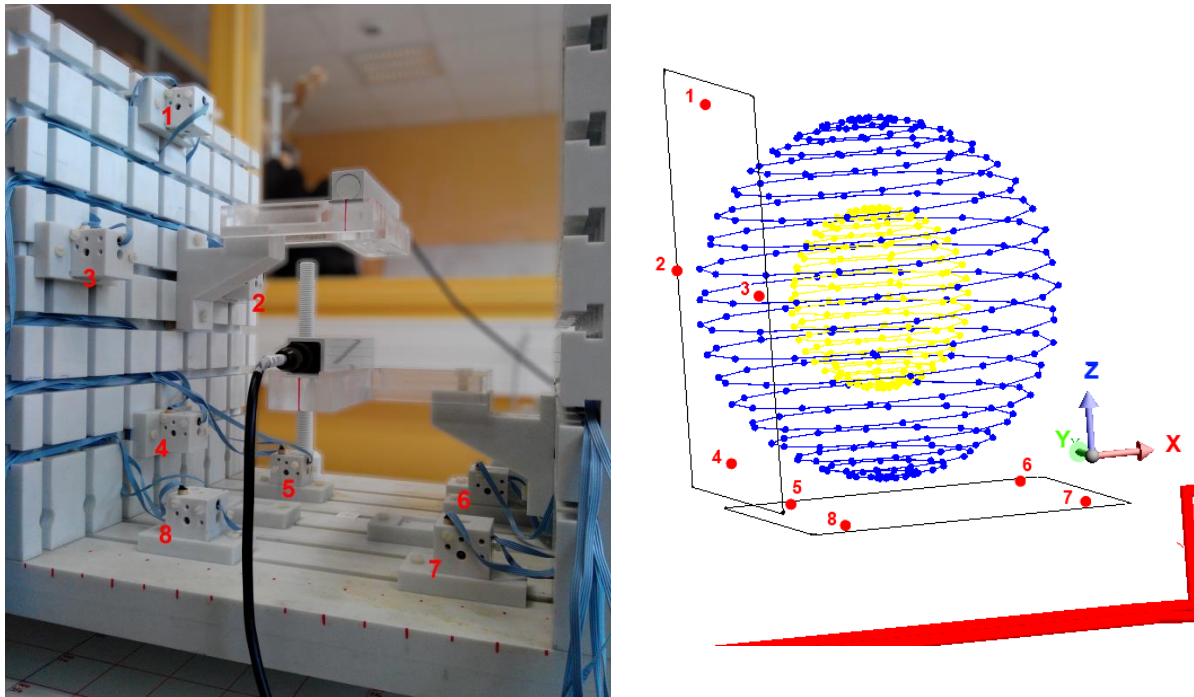


Figure V.15 : Placement des capteurs éloignés de la sphère d'étude comme insérés dans le siège passager

Avant toute chose, rappelons que nous devons identifier 48 coefficients harmoniques pour pouvoir approcher le champ magnétique à l'ordre 6 à l'intérieur de la sphère d'étude (rayon  $r = 0,150$  m).

Si cette approximation reste vraie pour l'intérieur de la sphère, il est important de noter que ce n'est peut-être plus tout à fait le cas pour les capteurs d'identification (points rouges). En effet ceux-ci sont placés plus loin du centre d'écriture mathématique de la décomposition et l'approximation harmonique du champ en ces points est probablement d'ordre plus élevé.

Pour s'en convaincre, faisons l'étude sur le modèle *a priori* (Figure V.11) pour la configuration de mesure proche de la sphère (Figure V.12) et la configuration de mesure éloignée de la sphère (Figure V.15).

Nous calculons les valeurs exactes du champ sur ces points (Biot et Savart) que nous comparons au signal approché à l'ordre 6. En remplaçant le signal « mesure » par le résultat du calcul exact, les écarts sont calculés selon la formule (V.2).

Le Tableau V.2 indique les résultats obtenus lorsque les capteurs sont proches de la sphère d'étude (Figure V.12) et le Tableau V.3 indique les écarts lorsque les capteurs sont éloignés de la sphère d'étude (Figure V.15).

	Rayon	Ecart en %, composante X	Ecart en %, composante Y	Ecart en %, composante Z
1	184 mm	6,84	-0,16	-3,45
2	162 mm	7,03	0,12	1,13
3	171 mm	-0,62	-3,13	3,76
4	174 mm	3,81	-2,03	7,48
5	170 mm	0,78	-1,43	15,91
6	168 mm	1,03	-3,21	2,81
7	162 mm	1,17	0,08	-0,55
8	184 mm	2,27	0,23	-1,24

**Tableau V.2 : Ecart en % entre les composantes exactes et les composantes approchées sur les points de mesures simulés proches de la sphère d'étude sur le modèle a priori**

	Rayon	Ecart en %, composante X	Ecart en %, composante Y	Ecart en %, composante Z
1	244 mm	24,81	-16,48	13,49
2	173 mm	-2,99	0,50	0,01
3	238 mm	6,24	-19,45	-828,38
4	201 mm	-9,72	0,53	9,22
5	189 mm	-1,44	-4,79	30,01
6	210 mm	-1,45	-4,45	18,23
7	256 mm	3,81	1,23	-84,69
8	239 mm	35,88	-7,92	75,59

**Tableau V.3 : Ecart en % entre les composantes exactes et les composantes approchées sur les points de mesures simulés éloignés de la sphère d'étude sur le modèle a priori**

On constate premièrement que même pour la configuration de mesure proche de la sphère d'étude (Figure V.12), l'approximation à l'ordre 6 du champ sur les capteurs d'identification introduit quelques erreurs (Tableau V.2). Néanmoins, nous avons vu que l'identification par l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) reste plus efficace que l'identification par l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV).

On constate ensuite que l'approximation à l'ordre 6 du champ sur les capteurs d'identification éloignés de la sphère d'étude engendre de plus fortes erreurs. Nous garderons néanmoins l'écriture harmonique à l'ordre 6 pour l'identification tout en considérant que le modèle mathématique reste exact : c'est-à-dire aucun changement sur la dimension de la matrice « A », du vecteur « X » et la matrice de covariance «  $S_m$  » reste proportionnelle à l'identité.

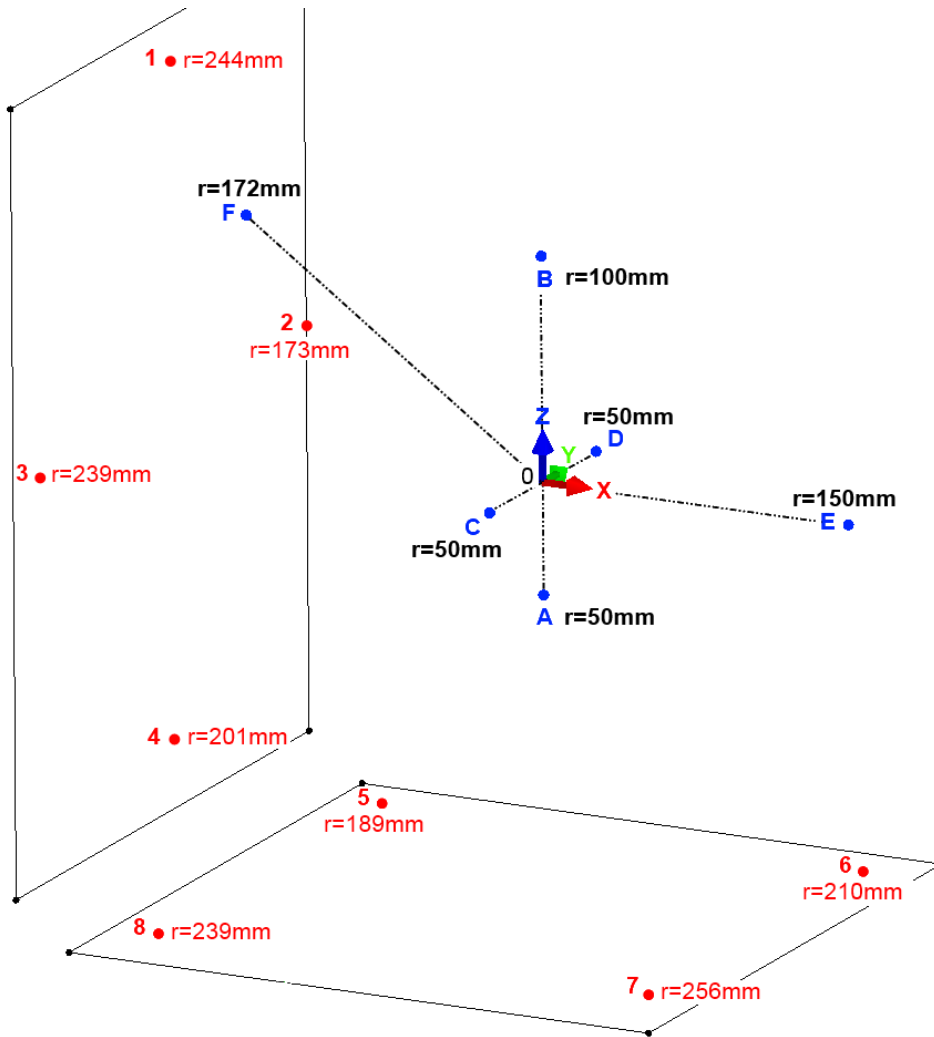


Figure V.16 : Illustration du positionnement des capteurs pour la vérification de la qualité d'identification

Après identification des coefficients harmoniques par les estimateurs MAP et MV, nous comparerons la mesure et les approximations calculées sur les points de vérification présentés.

La Figure V.17 présente le module du champ magnétique, mesuré d'une part et approché d'autre part en utilisant les coefficients obtenus soit par l'estimateur MV soit par l'estimateur MAP. Le champ donné par la solution *a priori* est également calculé sur les points de vérification afin de démontrer que celle-ci est bien modifiée par l'information provenant des mesures.

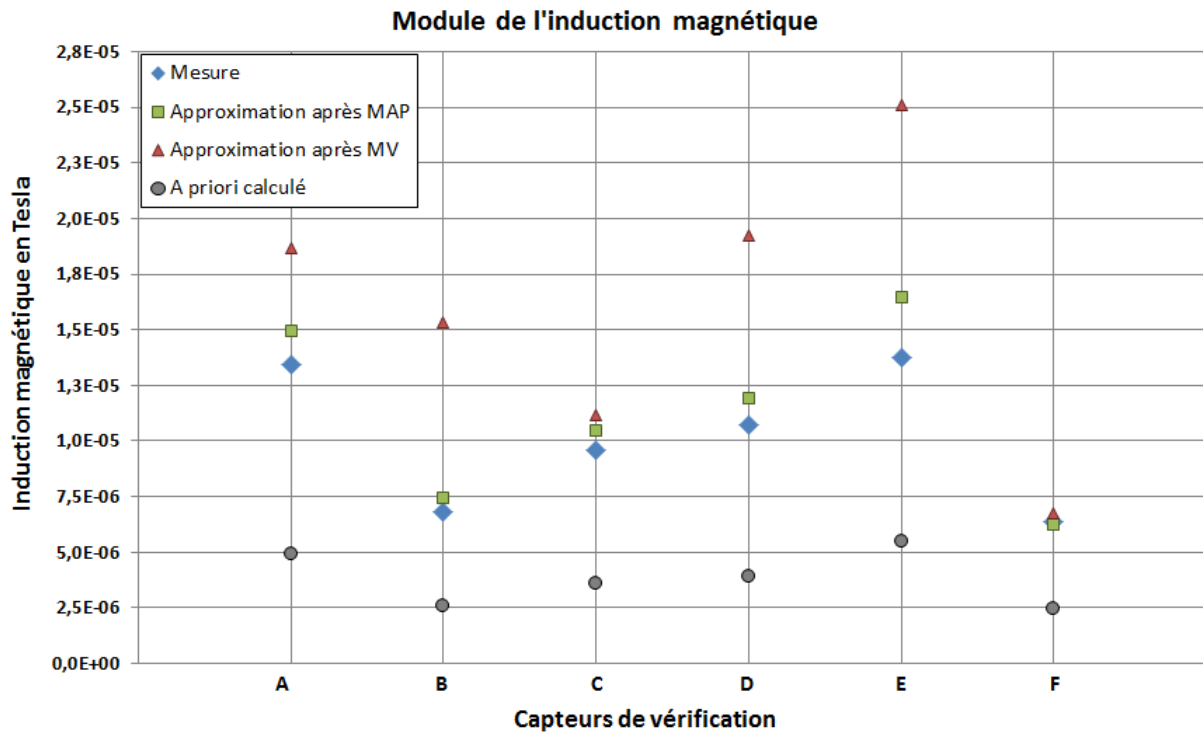


Figure V.17 : Module du champ sur les points de vérifications :  
valeurs approximées a posteriori lorsque les 8 capteurs d'identification sont éloignés de la sphère d'étude

On constate plus clairement que précédemment (Figure V.14), que l'identification est de meilleure qualité lorsque de l'information a priori est insérée : en atteste l'approximation du champ sur les capteurs de vérification.

Les résultats sont néanmoins moins bons même avec l'information a priori. Le Tableau V.4 recense alors les écarts (en % calculé selon la formule (V.2)) obtenus et rappelle les niveaux mesurés en Tesla pour chacune des composantes.

Les écarts obtenus confirment bien que le résultat d'identification se dégrade globalement.

Cette dégradation est néanmoins bien plus importante avec l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) avec un écart moyen (en valeur absolue) sur le module autour de 58% contre 14 % avec la configuration précédente.

Pour comparaison, ce même écart moyen avec le maximum *a posteriori* (MAP) est ici autour de 10 % contre 5 % avec la configuration précédente.

	<b>Composante X</b>	<b>Composante Y</b>	<b>Composante Z</b>	<b>Module</b>	<i>Estimateurs</i>
<b>Point A</b>	$-3,620 \times 10^{-6}$	$-9,996 \times 10^{-6}$	$8,216 \times 10^{-6}$	$13,440 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>46,9</b>	<b>11,6</b>	<b>2,7</b>	<b>11,4</b>	<b>MAP</b>
	-88,3	22,0	71,5	38,7	MV
<b>Point B</b>	$-1,329 \times 10^{-6}$	$-3,340 \times 10^{-6}$	$5,785 \times 10^{-6}$	$6,811 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>96,1</b>	<b>-8,5</b>	<b>9,0</b>	<b>9,7</b>	<b>MAP</b>
	-912,2	-208,4	77,3	125,0	MV
<b>Point C</b>	$-2,680 \times 10^{-6}$	$-7,792 \times 10^{-6}$	$5,395 \times 10^{-6}$	$9,614 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>60,4</b>	<b>5,7</b>	<b>-1,6</b>	<b>8,8</b>	<b>MAP</b>
	-149,0	-25,6	77,8	16,2	MV
<b>Point D</b>	$-2,534 \times 10^{-6}$	$-4,987 \times 10^{-6}$	$9,178 \times 10^{-6}$	$10,750 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>76,8</b>	<b>4,1</b>	<b>6,5</b>	<b>11,1</b>	<b>MAP</b>
	-261,2	39,9	90,0	78,8	MV
<b>Point E</b>	$-5,274 \times 10^{-6}$	$-6,904 \times 10^{-6}$	$10,670 \times 10^{-6}$	$13,760 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>87,3</b>	<b>9,0</b>	<b>0,8</b>	<b>19,4</b>	<b>MAP</b>
	-99,2	-72,2	134,8	82,6	MV
<b>Point F</b>	$-0,621 \times 10^{-6}$	$-3,527 \times 10^{-6}$	$5,305 \times 10^{-6}$	$6,400 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>-14,4</b>	<b>-18,8</b>	<b>3,6</b>	<b>-2,8</b>	<b>MAP</b>
	-696,3	0,7	-18,1	5,0	MV

**Tableau V.4 : Ecart en % entre le signal mesuré et le signal approché après identification  
avec 8 capteurs tri-axes éloignés de la sphère d'étude**

### Configuration n°2 : 4 capteurs tri-axes

Compte tenu de la qualité des résultats obtenus malgré les hypothèses formulées, nous sommes tentés de réduire le nombre de capteurs pour l'identification et nous faisons le choix de n'en garder que 4 parmi les 8 déjà placés.

Seules les mesures des magnétomètres « 1 », « 4 », « 6 » et « 7 » ne sont gardées afin de tout de même avoir une certaine variété spatiale d'information. En effet, les capteurs « 4 », « 6 » et « 7 » forment un plan de mesure assez proche de la source (câbles électriques) alors que le capteur « 1 », au niveau de la tête, mesure naturellement moins de champ magnétique.

Cette configuration n'apporte donc plus que 12 informations alors qu'il y a toujours 48 coefficients harmoniques à identifier.

La Figure V.18 présente le module du champ magnétique, mesuré d'une part et approché d'autre part en utilisant les coefficients obtenus soit par l'estimateur MV soit par l'estimateur MAP.

La solution obtenue par l'estimateur MAP est assez stable puisque l'approximation du module du champ reste semblable à celle présentée précédemment (Figure V.17). A contrario, on observe logiquement une dégradation de l'approximation du module avec la solution de l'estimateur MV.

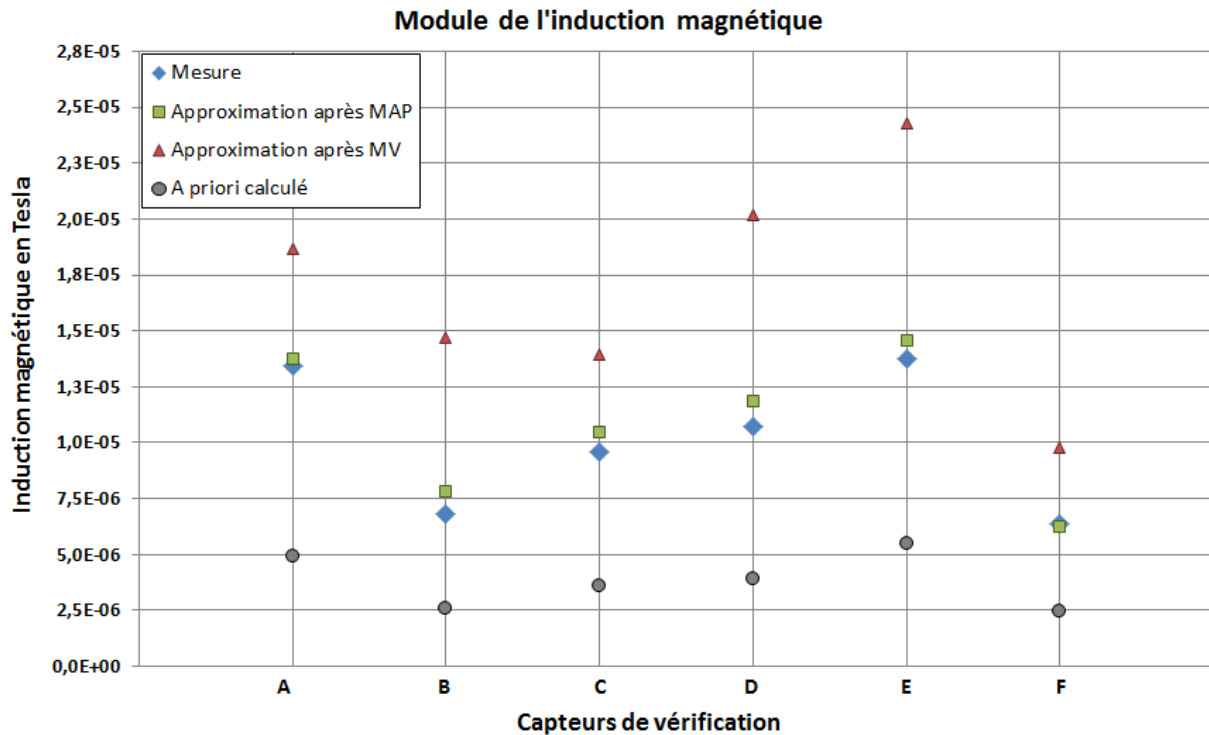


Figure V.18 : Module du champ sur les points de vérifications : valeurs approchées *a posteriori* lorsque les 4 capteurs d'identification sont éloignés de la sphère d'étude

Le Tableau V.5 recense les écarts obtenus (en % calculé selon la formule (V.2)) et rappelle les niveaux mesurés en Tesla pour chacune des composantes.

On observe une légère modification des écarts entre approximation et mesure après identification par l'estimateur MAP mais la moyenne reste stable (en valeur absolue) : autour de 8 % contre 10 % précédemment.

Pour comparaison, cet écart après identification avec l'estimateur MV augmente encore : autour de 70 % contre 58 % précédemment. Cette augmentation de l'erreur est normale puisque le nombre de coefficients harmoniques alors identifiés diminue.

	<b>Composante X</b>	<b>Composante Y</b>	<b>Composante Z</b>	<b>Module</b>	<i>Estimateurs</i>
<b>Point A</b>	$-3,620 \times 10^{-6}$	$-9,996 \times 10^{-6}$	$8,216 \times 10^{-6}$	$13,440 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>17,8</b>	<b>21,2</b>	<b>-39,1</b>	<b>2,6</b>	<b>MAP</b>
	61,9	63,2	-15,3	39,0	MV
<b>Point B</b>	$-1,329 \times 10^{-6}$	$-3,340 \times 10^{-6}$	$5,785 \times 10^{-6}$	$6,811 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>50,8</b>	<b>39,8</b>	<b>2,9</b>	<b>14,9</b>	<b>MAP</b>
	-166,1	135,1	114,2	115,8	MV
<b>Point C</b>	$-2,680 \times 10^{-6}$	$-7,792 \times 10^{-6}$	$5,395 \times 10^{-6}$	$9,614 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>11,2</b>	<b>19,0</b>	<b>-14,5</b>	<b>8,9</b>	<b>MAP</b>
	-18,4	49,2	49,0	45,0	MV
<b>Point D</b>	$-2,534 \times 10^{-6}$	$-4,987 \times 10^{-6}$	$9,178 \times 10^{-6}$	$10,750 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>50,3</b>	<b>45,3</b>	<b>-6,5</b>	<b>10,3</b>	<b>MAP</b>
	125,6	203,0	32,3	88,0	MV
<b>Point E</b>	$-5,274 \times 10^{-6}$	$-6,904 \times 10^{-6}$	$10,670 \times 10^{-6}$	$13,760 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>3,4</b>	<b>33,0</b>	<b>-7,4</b>	<b>5,7</b>	<b>MAP</b>
	-69,2	158,4	54,0	76,7	MV
<b>Point F</b>	$-0,621 \times 10^{-6}$	$-3,527 \times 10^{-6}$	$5,305 \times 10^{-6}$	$6,400 \times 10^{-6}$	Mesure (T)
	<b>89,9</b>	<b>17,7</b>	<b>-14,1</b>	<b>-2,0</b>	<b>MAP</b>
	137,6	51,4	52,5	53,2	MV

**Tableau V.5 : Ecart en % entre le signal mesuré et le signal approximé après identification  
avec 4 capteurs tri-axes éloignés de la sphère d'étude**

On pourrait croire que l'identification par le maximum *a posteriori* est meilleure lorsque le nombre de capteurs diminue mais ce n'est en réalité qu'une illustration de l'influence des deux principales hypothèses formulées.

La première hypothèse, faite au début de ce chapitre concerne les mesures : malgré le mésalignement des axes de mesure des Mag-3IE (inférieur à 3,5°), nous n'avons pas tenu compte de cette source d'erreur et nous avons considéré les niveaux mesurés comme exacts. En réduisant le nombre de capteurs, on diminue la quantité d'information utile mais également la quantité d'information erronée et cela a un impact sur la qualité de l'identification.

Le Tableau V.6 indique les niveaux de champ mesurés par les axes des magnétomètres d'identification (points rouges sur la Figure V.16) ainsi que l'écart à la modélisation de la maquette (Figure V.9). Les niveaux simulés sont obtenus par le calcul de la loi de Biot et Savart.



	Composante X	Composante Y	Composante Z	
Point 1	$-0,226 \times 10^{-6}$	$-2,656 \times 10^{-6}$	$3,353 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	12,0 %	-2,8 %	1,1 %	Ecart au modèle (%)
Point 2	$-0,413 \times 10^{-6}$	$-2,909 \times 10^{-6}$	$7,905 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	-30,2 %	-13,3 %	2,3 %	Ecart au modèle (%)
Point 3	$-0,647 \times 10^{-6}$	$-5,309 \times 10^{-6}$	$0,471 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	2,7 %	2,3 %	-3,0 %	Ecart au modèle (%)
Point 4	$-1,547 \times 10^{-6}$	$-14,280 \times 10^{-6}$	$-2,192 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	22,2 %	4,7 %	21,8 %	Ecart au modèle (%)
Point 5	$-3,565 \times 10^{-6}$	$-34,990 \times 10^{-6}$	$7,768 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	41,4 %	5,1 %	13,9 %	Ecart au modèle (%)
Point 6	$-13,810 \times 10^{-6}$	$-34,050 \times 10^{-6}$	$9,066 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	-6,9 %	6,0 %	-2,1 %	Ecart au modèle (%)
Point 7	$-6,814 \times 10^{-6}$	$-12,650 \times 10^{-6}$	$-6,497 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	-1,8 %	4,6 %	1,9 %	Ecart au modèle (%)
Point 8	$-2,225 \times 10^{-6}$	$-8,115 \times 10^{-6}$	$-6,518 \times 10^{-6}$	Niveau mesuré (T)
	17,4 %	7,4 %	5,1 %	Ecart au modèle (%)

Tableau V.6 : Niveaux de champ mesurés pour l'identification et écarts à la modélisation fine de la maquette

On constate en effet que les niveaux mesurés par les magnétomètres « 2 », « 5 » et « 8 » présentent un écart relativement important avec la modélisation de la maquette. Il apparaît donc important de caractériser la matrice de correction de chaque capteur pour améliorer la mesure et certainement conduire à de meilleurs résultats d'identification. Rappelons néanmoins que par manque de temps, nous n'avons malheureusement pas mis en œuvre cette caractérisation.

Les niveaux mesurés par le magnétomètre « 3 » ont également été retirés pour la mise en œuvre de ce problème inverse avec quatre capteurs tri-axes. On remarque que ces derniers sont plus proches du résultat de la modélisation de la maquette mais il faut rappeler également la seconde hypothèse de ces validations expérimentales.

En effet, malgré l'éloignement des points de mesure à la sphère d'étude, l'approximation harmonique du champ est toujours à l'ordre 6. Nous avons alors vu, dans le Tableau V.3, que l'écart entre le champ approximé à cet ordre avec le champ exact peut être important.

En réétudiant ce tableau, on remarque effectivement que l'approximation harmonique du champ à l'ordre 6 sur ce magnétomètre « 3 » engendre une forte erreur (plus de 800% sur la composante Z). Pour les magnétomètres « 5 » et « 8 », l'approximation harmonique est certes moins erronée (respectivement 30 % et 76 % sur la composante Z) mais rappelons que les niveaux mesurés présentent alors un écart important au modèle (Tableau V.6).

En définitive, en retirant ces quatre magnétomètres, le niveau d'erreur engendré par ces deux hypothèses diminue et conduit par conséquent à un meilleur résultat d'identification.

Ce ne sont bien sûr que ces considérations pratiques qui conduisent à cette conclusion. En effet, si le modèle est parfait et que les informations mesurées sont exactes, il est évident que le retrait d'information ne permet pas une meilleure identification.

Cette expérience démontre néanmoins la stabilité de la solution obtenue avec l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) grâce à l'information *a priori*. En effet, par comparaison, la réduction du nombre d'informations mesurées entraîne une nouvelle dégradation, assez notable, de la solution obtenue par l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV).

L'intérêt de coupler modélisation *a priori* et mesures dans une approche Bayésienne du problème inverse vient d'être clairement démontré par ces essais expérimentaux. Cette approche permet donc l'identification de nombreux paramètres avec très peu d'information mesurée.

## Conclusions intermédiaires

Une maquette a été développée pour les besoins de ce travail de thèse. Celle-ci a permis une validation expérimentale de l'approche en mettant en jeux de véritables mesures de champ et les mesures ont été réalisées de manière à ce que le niveau de bruit soit négligeable.

La première configuration de mesure a placé les capteurs proches de la sphère d'étude afin que les conditions soient le plus comparable possible des exemples numériques (présentés dans le chapitre précédent). Ceci a permis la validation de l'approche en démontrant que les niveaux de champ calculés *a posteriori* (après identification des coefficients harmoniques) sont proches des niveaux de champ mesurés. La seconde configuration de mesure a éloigné les capteurs par rapport à la sphère d'étude du champ. Malgré les hypothèses alors formulées sur l'approximation harmonique, l'estimateur du maximum *a posteriori* a montré sa force grâce à l'apport d'information *a priori*. Par comparaison, l'estimateur du maximum de vraisemblance identifie moins bien un nombre plus restreint de coefficients et par conséquent, le champ magnétique calculé *a posteriori* correspond moins bien à la mesure. Fort de ces résultats, une dernière configuration de mesure réduit alors le nombre de capteurs en sélectionnant parmi ceux de la seconde configuration. Là encore, le résultat d'identification de l'estimateur du maximum *a posteriori* est bien meilleur que celui obtenu par l'estimateur du maximum de vraisemblance.

En définitive, l'apport d'une solution *a priori* dans une approche statistique d'un problème inverse sous déterminé aide grandement sa résolution. En effet, nous avons montré ici l'identification de 48 coefficients harmoniques avec seulement 8 capteurs tri-axes (24 mesures). Grâce à l'information *a priori* (solution *a priori* et incertitudes associées), nous avons également étudié la stabilité de la solution avec seulement 4 capteurs tri-axes (12 mesures). Cette stabilité a par ailleurs été discutée compte tenu des hypothèses formulées à propos des mesures et du modèle.

On retiendra la possibilité d'identification de nombreux paramètres (les coefficients harmoniques) avec très peu d'information mesurée (problème inverse sous déterminé) grâce à l'apport d'information *a priori* (solution présumée et incertitudes associées).

## Conclusion générale et perspectives



### Conclusion générale

Nous voici arrivé au terme de ce manuscrit et il est temps de réaliser un bilan des travaux au regard des objectifs initiaux. Nous souhaitons être capable d'évaluer avec précision en tout point d'une zone d'étude, le champ magnétique émis par plusieurs équipements électrotechniques alors répartis autour. Cette configuration est typique des véhicules électriques lorsque l'on souhaite étudier le champ magnétique dans l'habitacle. Nous avons alors proposé de coupler informations *a priori* (provenant de modélisations directes mais partielles du système) et informations mesurées (niveaux de champ créés par le système en quelques points) dans une approche Bayésienne (vision statistique) du problème inverse afin d'identifier un maximum de paramètres.

Pour prendre en main le contexte d'étude, nous avons eu la chance de pouvoir participer au projet Européen « EMSafety » afin de réaliser plusieurs campagnes de mesures embarquées dans différents véhicules électriques. L'influence des équipements électrotechniques embarqués sur le niveau de champ magnétique dans l'habitacle a ainsi pu être évaluée. L'effet de blindage produit par les éléments ferromagnétiques a été mis en avant et les principales caractéristiques des sources (en termes de champ généré) ont été étudiées. Ces résultats ont par ailleurs été mis en comparaison avec les recommandations internationales (ICNIRP) afin d'évaluer leur importance et conclure sur le respect de ces dernières.

L'influence des éléments ferromagnétiques sur la répartition de champ à l'intérieur de l'habitacle intervient quelle que les sources. L'importance des boucles de courant de puissance sur le niveau global du champ magnétique a également été relevée. Des modélisations physiques ont alors été proposées afin de mettre en évidence les principaux paramètres qui conduisent à ces observations. Les résultats obtenus sont tout à fait correct compte tenu de la complexité du système étudié mais ceux-ci sont longs et fastidieux à obtenir. Malheureusement, cette démarche est totalement liée au système particulièrement étudié et les paramètres, trop nombreux et incertains, interdisent la généralisation du résultat. De plus, le nombre de degré de liberté étant tellement important, il est impossible de les identifier directement par la mesure du champ magnétique.

La base de description du champ magnétique a alors été changée pour le formalisme des harmoniques sphériques. Cette écriture mathématique met en jeu un nombre plus restreint de paramètres (les coefficients harmoniques) dont l'identification par la mesure est plus facilement réalisable. Nous avons en effet montré que le champ magnétique peut être approximé avec précision (pour la zone d'étude considérée, sphère englobant le passager avant du véhicule) avec seulement 48 coefficients harmoniques quelle que soit la complexité des sources. En effet, la modélisation physique des boucles de courant comportait près de 2000 paramètres et l'ajout des pièces ferromagnétiques maillées a porté le nombre de paramètres à plus de 17000. Dans les deux cas, l'approximation du champ ne nécessite un développement harmonique qu'à l'ordre 6, une légère perte de précision qui reste néanmoins maîtrisée.

La démarche de problème inverse a ensuite été mise en place pour l'identification de ces paramètres mathématiques (les coefficients harmoniques) grâce à la mesure du champ magnétique en quelques points. L'intérêt de l'approche Bayésienne a été illustré par l'intermédiaire de quelques exemples numériques en couplant informations *a priori* (solution présumée et incertitudes) et informations mesurées (niveaux de champ et incertitudes). Le problème inverse ainsi construit trouve un équilibre entre les différentes sources d'informations grâce aux intervalles de confiance définis (matrices de covariances). Il parvient à identifier les 48 coefficients harmoniques nécessaires à l'étude du champ avec seulement 24 informations mesurées sur la surface de la sphère d'étude.

Enfin, cette approche statistique du problème inverse a été mise à l'épreuve avec l'aide d'une réalisation expérimentale. Malgré les hypothèses alors formulées en matière de mesure et de modélisation, les résultats obtenus valident la force de l'approche en reproduisant les conditions de l'illustration numérique : 48 coefficients harmoniques à identifier avec seulement 24 informations mesurées. Une différence existe néanmoins, les capteurs expérimentaux sont placés sur deux plans comme si ils étaient intégrés au siège du véhicule. Même en réduisant le nombre d'informations mesurées par la sélection de 4 capteurs tri-axes parmi les 8 déjà placés, le résultat obtenu permet encore une bonne évaluation du champ à l'intérieur de la zone étudiée grâce à l'apport d'information *a priori*.

### Perspectives

Des études complémentaires devront bien sûr être menées afin d'évaluer en détail l'impact des hypothèses formulées lors des validations expérimentales, quantifier l'influence du modèle *a priori* sur le nombre d'information à apporter par la mesure et ainsi définir la qualité de la solution en fonction de tous ces paramètres. En effet, sans information *a priori*, il est nécessaire d'apporter autant d'informations par la mesure que d'inconnues à trouver. Avec information *a priori*, plus celle-ci est pertinente et proche de la réalité, plus le nombre de capteurs nécessaire à la correction de cette information devrait être faible, on tend vers une modélisation directe exhaustive. Au cours de ces travaux, nous n'avons en effet que effleuré le champ des possibles de cette approche et chercher les limites de la méthode semble être une évolution toute naturelle de ces travaux.

Nous nous sommes concentrés sur l'identification des paramètres afin d'évaluer la répartition du champ magnétostatique. Nous avons cependant relevé la présence de nombreuses fréquences dans le spectre du champ magnétique mesuré dans l'habitacle. La généralisation de l'approche pour des fréquences non nulles est une étape majeure si l'on souhaite pouvoir appliquer la méthode en temps réel dans un véhicule. On serait ainsi capable de connaître le champ magnétique partout et à chaque instant en présence des passager lorsque ces derniers effectuent un trajet. Ce serait là une belle évolution pour l'évaluation sanitaire de l'exposition des personnes aux champs magnétiques rayonnés.

Grâce au caractère très général de cette approche qui allie modélisation *a priori* et mesure dans l'objectif d'identifier des paramètres, le champ d'application est bien plus vaste que l'étude de la répartition du champ magnétique dans l'habitacle des véhicules électriques. En effet, à partir de quelques mesures de l'environnement (champ magnétique, tension de sortie, courant électrique débité ou absorbé, temps de réponse d'une machine, etc.), il semble ainsi tout à fait possible de suivre l'état de santé d'un équipement. Par exemple, connaître la répartition de courant dans un pack batterie fermé, évaluer l'évolution d'une résistance de contact pour une application sensible (dans l'aviation par exemple) ou même identifier les paramètres de réglage d'un correcteur installé sur une installation industrielle (régulation de tension ou de fréquence dans les centrales hydrauliques par exemple).





# Annexes

---



## A : Définition des polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre (ou fonctions de Legendre) sont solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables (A.1), aussi connue sous le nom « d'équation de Legendre ».

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.1})$$

La solution s'obtient par la méthode des séries de puissance [ROBIN 57] et s'écrit :

$$y = a_0 \cdot P_n(x) + b_0 \cdot Q_n(x) \quad (\text{A.2})$$

Où «  $P_n$  » et «  $Q_n$  » sont respectivement les polynômes de Legendre de 1<sup>o</sup> espèce et de 2<sup>o</sup> espèce de d'ordre «  $n$  ».

Nous ne nous intéresserons qu'aux polynômes de Legendre de première espèce dont l'écriture est définie ici par la formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (\text{A.3})$$

Cette formule permet d'obtenir, assez simplement, l'écriture des premiers ordres.

Polynômes	Expressions
$P_1(x)$	$x$
$P_2(x)$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x)$	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x)$	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
$P_7(x)$	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

Tableau A.1 : Expression des premiers polynômes de Legendre

Si on souhaite avoir des ordres plus élevés, il peut être plus commode d'utiliser d'autres définitions de ces polynômes. Nous les citons ici pour mémoire.

La formule de récurrence de Bonnet :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x \\ (n+1)P_n(x) &= (2n+1)x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x) & \forall n > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La définition sous forme de somme :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cdot (x-1)^{n-k} \cdot (x+1)^k \quad (\text{A.5})$$

La définition analytique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n \\ P_n(x) &= \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \oint \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \cdot z^{-(n+1)} dz \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## B : Harmoniques sphériques et polynômes de Legendre associés

Rappelons que les fonctions harmoniques sphériques sont solution de l'équation de Laplace ( $\Delta X = 0$ ) en coordonnées sphériques [DURAND 66], [ANGOT 72], [SCHMERBER 06].

$$X(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \left( a_{n,m} \cdot r^n + \frac{b_{n,m}}{r^{n+1}} \right) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \right] \quad (\text{B.1})$$

Avec le terme  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ , les fonctions harmoniques sphériques, définies par [LEGRIS 96] :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \cdot P_n^{|m|}(\cos(\theta)) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos(|m| \cdot \varphi) & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin(|m| \cdot \varphi) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Où  $P_n^{|m|}$  représente le polynôme de Legendre associé défini avec «  $x = \cos(\theta)$  » :

$$P_n^m(x) = (-1)^m \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (\text{B.3})$$

Soit l'écriture analytique suivante en fonction de l'ordre «  $n$  » et du degré «  $m$  » :

	$x$	$\cos(\theta)$
$P_1^0$	$x$	$\cos(\theta)$
$P_1^1$	$-\sqrt{1-x^2}$	$-\sin(\theta)$
$P_2^0$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3 \cdot \cos^2(\theta) - 1)$
$P_2^1$	$-\sqrt{1-x^2} \cdot 3x$	$-3 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)$
$P_2^2$	$3 \cdot (1-x^2)$	$3 \cdot \sin^2(\theta)$
$P_3^0$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{2}(5 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta))$
$P_3^1$	$-\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{3}{2}(5x^2 - 1)$	$-\frac{3}{2}\sin(\theta)(5\cos^2(\theta) - 1)$
$P_3^2$	$(1-x^2) \cdot 15x$	$15 \cdot \sin^2(\theta) \cos(\theta)$
$P_3^3$	$-(1-x^2)^{3/2} \cdot 15$	$15 \cdot \sin^3(\theta)$

Tableau B.1 : Expression des premiers polynômes de Legendre associés

## C : Projection de la composante radiale de l'induction magnétique sur les fonctions harmoniques sphériques

Les fonctions harmoniques sphériques forment une base orthogonale. Cette propriété d'orthogonalité provient des polynômes de Legendre et mis en évidence dans [ROBIN 57], [ANGOT 72] et repris par [LEGRIS 96].

Posons  $Y_{n0}^{m0}$  et  $Y_{n1}^{m1}$ , deux fonctions harmonique sphériques et calculons leur produit scalaire  $\langle Y_{n0}^{m0} | Y_{n1}^{m1} \rangle$ .

$$I_0 = \langle Y_{n0}^{m0} | Y_{n1}^{m1} \rangle = \oint\!\!\!\oint Y_{n0}^{m0}(\theta, \varphi) \cdot Y_{n1}^{m1}(\theta, \varphi) \cdot dS \quad (\text{C.1})$$

En insérant l'expression des fonctions telle que définie par [LEGRIS 96] (équation (B.2) en annexe B), «  $I_0$  » s'écrit :

$$I_0 = \oint\!\!\!\oint P_{n0}^{m0}(\cos(\theta)) P_{n1}^{m1}(\cos(\theta)) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_0 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_0 \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_1 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_1 \varphi) \end{pmatrix} \cdot dS \quad (\text{C.2})$$

Cette intégrale surfacique se scinde aisément en deux intégrales. «  $I_1$  » pour le calcul selon la variable «  $\varphi$  » (équation (C.3)) et «  $I_2$  » pour le calcul selon la variable «  $\theta$  » (équation (C.4)).

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_0 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_0 \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_1 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_1 \varphi) \end{pmatrix} d\varphi \quad \begin{matrix} \text{Si } m_0 > 0 \text{ et } m_1 > 0 \\ \text{Si } m_0 = 0 \text{ et } m_1 = 0 \\ \text{Si } m_0 < 0 \text{ et } m_1 < 0 \end{matrix} \quad (\text{C.3})$$

$$I_2 = \int_0^\pi P_{n0}^{m0}(\cos(\theta)) \cdot P_{n1}^{m1}(\cos(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta \quad (\text{C.4})$$

Le calcul de «  $I_1$  » est relativement évident et conduit au résultat suivant :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_0 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_0 \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(m_1 \varphi) \\ 1 \\ \sqrt{2} \sin(m_1 \varphi) \end{pmatrix} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{Si } m_0 \neq m_1 \\ 2\pi & \text{Si } m_0 = m_1 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Riche de ce résultat, nous ne nous concentrons ensuite sur le calcul de «  $I_2$  » en posant «  $m = m_0 = m_1$  ». Celui-ci est moins évident mais déjà connu [ROBIN 57], [ANGOT 72] :

$$I_2 = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad \text{Si } n = n_0 = n_1 \quad (\text{C.6})$$

En définitive, le produit scalaire  $I_0 = \langle Y_{n_0}^{m_0} | Y_{n_1}^{m_1} \rangle$  vaut :

$$I_0 = \langle Y_{n_0}^{m_0} | Y_{n_1}^{m_1} \rangle = \frac{4\pi}{2n+1} \quad \text{Si } \begin{cases} n = n_0 = n_1 \\ m = m_0 = m_1 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Reprenons alors l'expression analytique de l'approximation harmonique de la composante radiale de l'induction magnétique :

$$B_r(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \cdot n \cdot r^{n-1} \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{C.8})$$

Grâce à la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre et donc des fonctions harmoniques sphériques, il paraît intéressant de définir l'intégrale suivante :

$$I_{n_0, m_0} = \oint\!\!\!\oint B_r(r_0, \theta, \varphi) \cdot Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi) \cdot r_0^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (\text{C.9})$$

Au regard de (C.7), le calcul de «  $I_{n_0, m_0}$  » vaut alors :

$$I_{n_0, m_0} = -\mu_0 \cdot a_{n_0, m_0} \cdot \frac{n_0}{2n_0 + 1} \cdot r^{n_0+1} \quad (\text{C.10})$$

Ce calcul, réalisé sur la surface d'une sphère de rayon «  $r_0$  » ne traversant aucune source, consiste donc à projeter la composante radiale de l'induction magnétique sur la fonction harmonique «  $Y_{n_0}^{m_0}(\theta, \varphi)$  » et permet l'obtention du coefficient harmonique «  $a_{n_0, m_0}$  » associé. Cela permet donc d'obtenir la description par les harmoniques sphériques de n'importe quelle induction magnétique dans l'air.



## D : Complément de calcul du maximum de vraisemblance

Dans l'approche Bayésienne du problème inverse «  $A \cdot X = B$  », la fonction de vraisemblance «  $P(B_m|X)$  » décrit la probabilité de la modélisation directe du problème.

$$P(B_m|X) = C^{ste} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m)\right) \quad (D.1)$$

Le maximum de vraisemblance consiste à trouver le vecteur «  $X$  » qui maximise cette probabilité et implique donc la minimisation de la fonction suivante :

$$f_V = (AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m) \quad (D.2)$$

Soit en développant :

$$f_V = X^T A^T S_m^{-1} A X - B_m^T S_m^{-1} A X - X^T A^T S_m^{-1} B_m + B_m^T S_m^{-1} B_m \quad (D.3)$$

La fonction «  $f_V$  » étant de forme quadratique (matricielle), sa minimisation consiste alors dans l'annulation de sa dérivée.

$$\text{grad}_X(f_V) = (A^T S_m^{-1} A) X + (A^T S_m^{-1} A)^T X - (B_m^T S_m^{-1} A)^T - A^T S_m^{-1} B_m \quad (D.4)$$

Rappelons la symétrie de la matrice «  $S_m$  » (matrice de covariance, donc symétrique définie positive). Ainsi (D.4) peut s'écrire comme suit :

$$\text{grad}_X(f_V) = 2 \cdot A^T S_m^{-1} A X - 2 \cdot A^T S_m^{-1} B_m = 0 \quad (D.5)$$

La solution «  $X_{MV}$  » qui satisfait (D.5) et maximise donc la fonction de vraisemblance (D.1) s'obtient naturellement.

$X_{MV} = (A^T S_m^{-1} A)^{-1} A^T S_m^{-1} B_m \quad (D.6)$
---

## E : Complément de calcul du maximum a posteriori

Dans l'approche Bayésienne du problème inverse «  $AX=B$  », la probabilité *a posteriori* «  $P(X|B_m)$  » est le produit de la fonction de vraisemblance «  $P(B_m|X)$  » avec la probabilité *a priori* «  $P(X)$  » des paramètres.

$$P(X|B_m) \propto P(B_m|X) \cdot P(X) \quad (\text{E.1})$$

Avec «  $P(B_m|X)$  » déjà définie par (D.1) et «  $P(X)$  » comme suit :

$$P(X) = C^{ste} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (X - X_0)^T \cdot S_0^{-1} \cdot (X - X_0)\right) \quad (\text{E.2})$$

Le maximum a posteriori consiste à trouver le vecteur «  $X$  » qui maximise la probabilité (E.1) et implique donc la minimisation de la fonction suivante :

$$f_{AP} = (AX - B_m)^T \cdot S_m^{-1} \cdot (AX - B_m) + (X - X_0)^T \cdot S_0^{-1} \cdot (X - X_0) \quad (\text{E.3})$$

La fonction «  $f_{AP}$  » étant de forme quadratique (matricielle), sa minimisation consiste alors dans l'annulation de sa dérivée. La dérivée du terme de gauche a déjà été calculée (expression (D.4)). On note «  $f_0$  » le terme de droite que l'on développe :

$$f_0 = X^T S_0^{-1} X - X^T S_0^{-1} X_0 - X_0^T S_0^{-1} X + X_0^T S_0^{-1} X_0 \quad (\text{E.4})$$

De la même manière que dans l'annexe D et parce que «  $S_0$  » est symétrique, la dérivée de «  $f_{AP}$  » s'écrit :

$$\text{grad}_X(f_{AP}) = 2 \cdot A^T S_m^{-1} AX - 2 \cdot A^T S_m^{-1} B_m + 2 \cdot S_0^{-1} X - 2 \cdot S_0^{-1} X_0 = 0 \quad (\text{E.5})$$

La solution «  $X_{MAP}$  » qui satisfait (E.5) et maximise donc la fonction de vraisemblance (E.1) s'obtient naturellement.

$$X_{MAP} = (A^T S_m^{-1} A + S_0^{-1})^{-1} (A^T S_m^{-1} B_m + S_0^{-1} X_0) \quad (\text{E.6})$$

Cette solution peut par ailleurs s'écrire autrement. En effet, si on ajoute et retranche l'expression «  $(A^T S_m^{-1} A + S_0^{-1}) X_0$  » dans l'équation (E.5), on obtient facilement l'expression suivante :

$$X_{MAP} = X_0 + (A^T S_m^{-1} A + S_0^{-1})^{-1} A^T S_m^{-1} (B_m - AX_0) \quad (\text{E.7})$$

Il est alors intéressant de noter une des identités de Sherman-Morrison-Woodbury mettant en jeu les matrices « E », « F », « G » et « H ».

Sous condition que les matrices « E » et « G » soient inversibles, on a donc la relation suivante :

$$(E + FGH)^{-1}FG = E^{-1}F(G^{-1} + HE^{-1}F)^{-1} \quad (\text{E.8})$$

Par identification avec les termes de l'expression (E.7), « E = S<sub>0</sub><sup>-1</sup> » et « G = S<sub>m</sub><sup>-1</sup> ». Rappelons que ce sont les inverses des matrices de covariances (symétriques définies positives).

On en déduit ainsi la dernière écriture possible de la solution du maximum *a posteriori* :

$X_{MAP} = X_0 + S_0 A^T (S_m + A S_0 A^T)^{-1} (B_m - A X_0) \quad (\text{E.9})$
---

## F : Calcul analytique de la matrice de covariance S<sub>0</sub> de l'information a priori pour un cas d'étude en deux dimensions

### Définitions

Définissons la position de « k » conducteurs linéiques rectilignes infinis dans un repère cylindrique par les coordonnées (r<sub>i</sub>, θ<sub>i</sub>) où chacun est traversé par un courant électrique de valeur « i<sub>i</sub> ».

Rappelons que l'on souhaite étudier le champ magnétique par l'intermédiaire de l'écriture harmonique de ce dernier. Les coefficients harmoniques alors associés en problème externe s'écrivent comme suit lorsque « k » conducteurs sont source de champ :

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k i_i \cdot r_i^n \cdot \cos(n \cdot \theta_i) \quad (\text{F.1})$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k i_i \cdot r_i^n \cdot \sin(n \cdot \theta_i) \quad (\text{F.2})$$

Si on définit les paramètres (i<sub>i</sub>, r<sub>i</sub>, θ<sub>i</sub>) incertains, on souhaite donc connaître la covariance « S<sub>0</sub> » du vecteur « X<sub>0</sub> » contenant les coefficients harmoniques à identifier jusqu' l'ordre « n » :

$$X_0 = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2 \ \dots \ a_n \ b_n]^T \quad (\text{F.3})$$

Par définition :

$$S_0(i, j) = E[ (X_0(i) - E[X_0(i)]) (X_0(j) - E[X_0(j)]) ] \quad (\text{F.4})$$

Soit alors :

$$S_0(i, j) = E[X_0(i)X_0(j)] - E[X_0(i)]E[X_0(j)] \quad (\text{F.5})$$

Les coefficients « a<sub>n</sub> » et « b<sub>n</sub> » étant liés, il sera plus simple de travailler avec le coefficient harmonique complexe « c<sub>n</sub> » défini tel que :

$$c_n = a_n + j \cdot b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k i_i \cdot (r_i \cdot e^{j \cdot \theta_i})^n \quad (\text{F.6})$$

Supposons à présent que cette modélisation des conducteurs est entachée d'incertitudes aléatoires. C'est-à-dire que la variable aléatoire «  $\mathbf{I}_i$  » définit la valeur du courant, uniformément répartie sur l'intervalle  $[i_i - \Delta i_i/2 ; i_i + \Delta i_i/2]$  :

$$\mathbf{I}_i: f(i_i) = \frac{1}{\Delta i_i} \quad (\text{F.7})$$

La position «  $z_i$  » du conducteur suit également une loi uniforme sur le cercle centré sur ce dernier et de rayon «  $p_i$  ». La variable aléatoire «  $\mathbf{Z}_i$  » qui définit la position du conducteur s'écrit :

$$\mathbf{Z}_i = z_i + \mathbf{P}_i \cdot e^{j \cdot \Phi_i} \quad (\text{F.8})$$

Où  $z_i = r_i \cdot [\cos(\theta_i) + j \sin(\theta_i)]$  et «  $\mathbf{P}_i$  » est la variable aléatoire décrivant le rayon sur l'intervalle  $[0 ; \rho_i]$  du disque et «  $\Phi_i$  » est la variable aléatoire décrivant l'angle sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ .

La Figure F.1 représente alors ce paramétrage pour un conducteur.

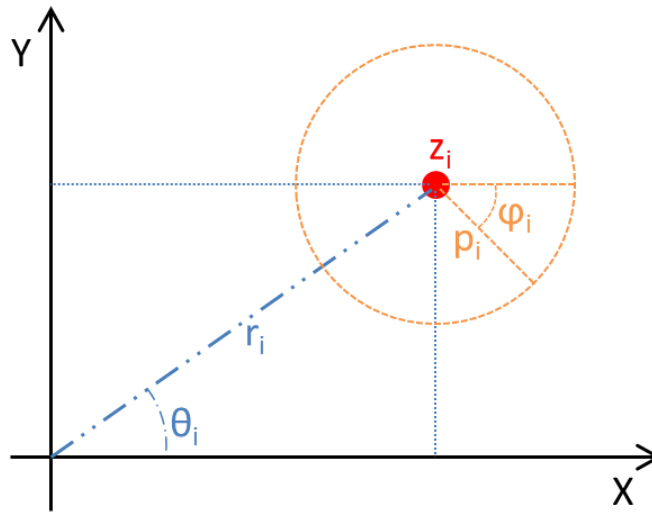


Figure F.1 : Illustration du paramétrage d'un des «  $k$  » conducteurs composant la source de champ.

On montre classiquement «  $\mathbf{P}_i$  » et «  $\Phi_i$  » sont indépendants et définis comme suit :

$$\mathbf{P}_i: f(p_i) = \frac{2 \cdot p_i}{\rho_i^2} \quad (\text{F.9})$$

$$\Phi_i: f(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{F.10})$$

Grâce au paramétrage aléatoire des paramètres, on obtient finalement la variable aléatoire «  $C_n$  » telle que :

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k I_i \cdot (Z_i)^n \quad (\text{F.11})$$

On suppose enfin que la position de chaque conducteur est indépendante de la position d'un autre et que la valeur du courant électrique est indépendante de la position du conducteur concerné. Nous allons alors calculer les moments statistiques d'ordre 1 (espérance mathématique) et d'ordre 2 (covariance mathématique) de cette variable aléatoire.

### Moment statistique d'ordre 1

Puisque les variables aléatoires «  $I_i$  » et «  $Z_i$  » sont indépendantes, on a la relation :

$$E[C_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k I_i \cdot (Z_i)^n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k E[I_i] \cdot E[(Z_i)^n] \quad (\text{F.12})$$

On obtient alors :

- $E[I_i] = i_i$  car «  $I_i$  » est uniforme sur l'intervalle  $[i_i - \Delta i_i/2 ; i_i + \Delta i_i/2]$ .
- $E[(Z_i)^n] = E[(z_i + \mathbf{P}_i \cdot e^{j \cdot \Phi_i})^n] = E[\mathbf{Z}_i]^n$  car «  $\mathbf{P}_i$  » et «  $\Phi_i$  » sont indépendants.

Or nous avons la relation suivante :

$$E[\mathbf{Z}_i] = E[z_i] + E[\mathbf{P}_i \cdot e^{j \cdot \Phi_i}] \quad (\text{F.13})$$

On obtient donc :

- $E[z_i] = z_i$  car ce n'est pas une variable aléatoire.
- $E[\mathbf{P}_i \cdot e^{j \cdot \Phi_i}] = 0$  car «  $\mathbf{P}_i$  » et «  $\Phi_i$  » sont indépendants et l'espérance mathématique d'une exponentielle complexe sur tout le domaine est nulle (cf. (F.14)).

$$E[\mathbf{P}_i \cdot e^{j \cdot \Phi_i}] = \int_{p_i=0}^{\rho_i} p_i \cdot f(p_i) \cdot dp_i \cdot \int_{\varphi_i=0}^{2\pi} e^{j \cdot \varphi_i} \cdot f(\varphi_i) \cdot d\varphi_i \quad (\text{F.14})$$

En définitive, l'espérance mathématique de la variable aléatoire «  $C_n$  » vaut la valeur obtenue à partir des valeurs *a priori* des paramètres ( $i_i$ ,  $r_i$ ,  $\theta_i$ ) et s'écrit :

$$E[C_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k i_i \cdot (z_i)^n \quad (\text{F.15})$$

## Moment statistique d'ordre 2

L'équation (F.5) indique le calcul du terme (i, j) de la matrice de covariance  $S_0$ . En pratique, nous allons calculer les moments statistiques suivants :

$$E[c_{n1}c_{n2}] = E[a_{n1}a_{n2}] - E[b_{n1}b_{n2}] + j \cdot (E[a_{n1}b_{n2}] + E[b_{n1}a_{n2}]) \quad (\text{F.16})$$

$$E[c_{n1}c_{n2}^*] = E[a_{n1}a_{n2}] + E[b_{n1}b_{n2}] - j \cdot (E[a_{n1}b_{n2}] - E[b_{n1}a_{n2}]) \quad (\text{F.17})$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\text{Re}(E[c_{n1}c_{n2}] + E[c_{n1}c_{n2}^*]) = 2 \cdot E[a_{n1}a_{n2}] \quad (\text{F.18})$$

$$\text{Re}(E[c_{n1}c_{n2}^*] - E[c_{n1}c_{n2}]) = 2 \cdot E[b_{n1}b_{n2}] \quad (\text{F.19})$$

$$\text{Im}(E[c_{n1}c_{n2}] - E[c_{n1}c_{n2}^*]) = 2 \cdot E[a_{n1}b_{n2}] \quad (\text{F.20})$$

$$\text{Im}(E[c_{n1}c_{n2}] + E[c_{n1}c_{n2}^*]) = 2 \cdot E[b_{n1}a_{n2}] \quad (\text{F.21})$$

Grâce à ces relations et au résultat obtenu dans le paragraphe précédent (moment statistique d'ordre 1), on retrouve aisément la relation (F.5) pour le calcul des termes de la matrice de covariance  $S_0$ .

Commençons donc par développer le calcul de la relation (F.16) :

$$E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}] = E\left[\left(\frac{1}{n1} \sum_{i1=1}^k \mathbf{I}_{i1} \cdot \mathbf{Z}_{i1}^{n1}\right) \cdot \left(\frac{1}{n2} \sum_{i2=1}^k \mathbf{I}_{i2} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{n2}\right)\right] \quad (\text{F.22})$$

Rappelons que les variables aléatoires «  $\mathbf{I}_i$  » et «  $\mathbf{Z}_i$  » sont définies indépendantes. On peut ainsi réécrire la relation de la manière suivante :

$$E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1=1}^k \sum_{i2=1}^k E[\mathbf{I}_{i1} \cdot \mathbf{I}_{i2}] \cdot E[\mathbf{Z}_{i1}^{n1} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{n2}] \quad (\text{F.23})$$

Lorsque  $i_1 = i_2 = i$ , nous avons :

$$\frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i=1}^k E[\mathbf{I}_i^2] \cdot E[\mathbf{Z}_i^{n1+n2}] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i=1}^k \left(i_i^2 + \frac{(\Delta i_i)^2}{12}\right) \cdot \mathbf{Z}_i^{(n1+n2)} \quad (\text{F.24})$$

Car :

$$E[\mathbf{I}_i^2] = \int_{i_i - \frac{\Delta i_i}{2}}^{i_i + \frac{\Delta i_i}{2}} i_i^2 \cdot f(i_i) \cdot di_i = \int_{i_i - \frac{\Delta i_i}{2}}^{i_i + \frac{\Delta i_i}{2}} \frac{i_i^2}{\Delta i_i} \cdot di_i = i_i^2 + \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \quad (\text{F.25})$$

$$E[\mathbf{Z}_i^{n1+n2}] = E[\mathbf{Z}_i]^{n1+n2} = (z_i)^{n1+n2} \quad (\text{F.26})$$

Lorsque  $i_1 \neq i_2$ , puisque nous avons défini chaque conducteur indépendant des autres, on peut alors écrire la relation suivante :

$$\frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1 \neq i2}^k E[\mathbf{I}_{i1}]E[\mathbf{I}_{i2}] \cdot E[\mathbf{Z}_{i1}^{n1}]E[\mathbf{Z}_{i2}^{n2}] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1 \neq i2}^k i_{i1} \cdot i_{i2} \cdot z_{i1}^{n1} \cdot z_{i2}^{n2} \quad (\text{F.27})$$

En définitive, en insérant le terme «  $(i_i)^2$  » dans la relation ci-dessus, le calcul de (F.16) conduit au résultat suivant :

$$E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \left( \sum_{i1, i2}^k i_{i1} \cdot i_{i2} \cdot z_{i1}^{n1} \cdot z_{i2}^{n2} + \sum_{i1=i2=i}^k \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot z_i^{(n1+n2)} \right) \quad (\text{F.28})$$

On remarque que le premier terme correspond à «  $E[\mathbf{C}_{n1}]E[\mathbf{C}_{n2}]$  ». Ainsi, par identification avec l'expression (F.5), on obtient la covariance «  $Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) = E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}] - E[\mathbf{C}_{n1}]E[\mathbf{C}_{n2}]$  » telle que :

$$Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1=i2=i}^k \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot z_i^{(n1+n2)} \quad (\text{F.29})$$

Développons à présent le calcul de la relation (F.17). De la même manière. Puisque les variables aléatoires «  $\mathbf{I}_i$  » et «  $\mathbf{Z}_i$  » sont indépendantes, on obtient la relation suivante :

$$E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}^*] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1=1}^k \sum_{i2=1}^k E[\mathbf{I}_{i1} \cdot \mathbf{I}_{i2}] \cdot E[\mathbf{Z}_{i1}^{n1} \cdot \mathbf{Z}_{i2}^{*n2}] \quad (\text{F.30})$$

Lorsque  $i_1 = i_2 = i$ , nous retrouvons l'expression (F.25) d'une part et nous avons l'expression suivante d'autre part :



$$E[\mathbf{Z}_i^{n1} \cdot \mathbf{Z}_i^{*n2}] = E\left[(z_i + \mathbf{P}_i e^{j\Phi_i})^{n1} \cdot (z_i^* + \mathbf{P}_i e^{-j\Phi_i})^{n2}\right] \quad (\text{F.31})$$

Grâce à la formule du binôme de Newton, nous avons :

$$(z_i + \mathbf{P}_i e^{j\Phi_i})^{n1} = \sum_{l1=0}^{n1} \binom{n1}{l1} \cdot z_i^{n1-l1} \cdot (\mathbf{P}_i e^{j\Phi_i})^{l1} \quad (\text{F.32})$$

Puisque «  $z_i$  » est déterministe et que «  $\mathbf{P}_i$  » et «  $\Phi_i$  » sont deux variables aléatoires indépendantes, on peut réécrire (F.31) comme suit :

$$E[\mathbf{Z}_i^{n1} \mathbf{Z}_i^{*n2}] = \sum_{l1, l2}^{n1, n2} \binom{n1}{l1} \binom{n2}{l2} E[z_i]^{n1-l1} E[z_i^*]^{n2-l2} E[\mathbf{P}_i^{l1+l2}] E[e^{j(l1-l2)\Phi_i}] \quad (\text{F.33})$$

On remarque clairement que cette expression est non nulle uniquement lorsque  $l1 = l2 = l$  à cause du dernier terme ( $E[e^{j(l1-l2)\Phi_i}]$ ). Ainsi, on obtient :

$$E[\mathbf{Z}_i^{n1} \mathbf{Z}_i^{*n2}] = \sum_{l=0}^{\min(n1, n2)} \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} E[z_i]^{n1-l} E[z_i^*]^{n2-l} E[\mathbf{P}_i^{2 \cdot l}] \quad (\text{F.34})$$

Avec :

$$E[\mathbf{P}_i^{2 \cdot l}] = \int_0^{\rho_i} p_i^{2l} \cdot f(p_i) \cdot dp_i = \int_0^{\rho_i} p_i^{2l} \cdot \left(\frac{2 \cdot p_i}{\rho_i^2}\right) \cdot dp_i = \frac{\rho_i^{2l}}{l+1} \quad (\text{F.35})$$

Lorsque  $i_1 \neq i_2$ , puisque nous avons défini chaque conducteur indépendant des autres, on peut alors écrire la relation suivante :

$$\frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1 \neq i2}^k E[\mathbf{I}_{i1}] E[\mathbf{I}_{i2}] \cdot E[\mathbf{Z}_{i1}^{n1}] E[\mathbf{Z}_{i2}^{*n2}] = \frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1 \neq i2}^k i_{i1} \cdot i_{i2} \cdot z_{i1}^{n1} \cdot z_{i2}^{*n2} \quad (\text{F.36})$$

En définitive, le calcul de  $E[\mathbf{C}_{n1} \mathbf{C}_{n2}^*]$  conduit au résultat suivant :

$$\frac{1}{n1 \cdot n2} \left[ \sum_{i1=i2=i}^k \left( i_i^2 + \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \right) \sum_{l=0}^{\min(n1,n2)} \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} z_i^{(n1-l)} \cdot z_i^{*(n2-l)} \cdot \frac{\rho_i^{2l}}{l+1} + \sum_{i1 \neq i2}^k i_{i1} \cdot i_{i2} \cdot z_{i1}^{n1} \cdot z_{i2}^{*n2} \right] \quad (\text{F.37})$$

Là encore, en insérant le premier terme «  $(i_i)^2$  » dans la seconde partie de l'expression, on identifie cette dernière à l'écriture de «  $E[\mathbf{C}_{n1}]E[\mathbf{C}_{n2}^*]$  ».

Ainsi, par identification avec l'expression (F.5), on obtient finalement l'écriture de la covariance «  $Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}^*) = E[\mathbf{C}_{n1}\mathbf{C}_{n2}^*] - E[\mathbf{C}_{n1}]E[\mathbf{C}_{n2}^*]$  » telle que :

$$\frac{1}{n1 \cdot n2} \sum_{i1=i2=i}^k \left( i_i^2 \sum_{l=1}^{\min(n1,n2)} \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} z_i^{(n1-l)} \cdot z_i^{*(n2-l)} \cdot \frac{\rho_i^{2l}}{l+1} + \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \sum_{l=0}^{\min(n1,n2)} \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} z_i^{(n1-l)} \cdot z_i^{*(n2-l)} \cdot \frac{\rho_i^{2l}}{l+1} \right) \quad (\text{F.38})$$

### Calcul des termes de la matrice de covariance $S_0$

Illustrons le résultat en limitant le développement harmonique à l'ordre  $n = 2$ .

Soit alors le vecteur «  $\mathbf{X}_0$  » et la matrice de covariance «  $\mathbf{S}_0$  » suivant :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}$$

En posant «  $c_n = a_n + j \cdot b_n$  » avec  $n = [1,2]$  et grâce aux résultats obtenus plus tôt, les termes de la matrice de covariance sont les suivants :

$2 \cdot S_{11} = \text{Re}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1) + Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1^*)]$	$2 \cdot S_{13} = \text{Re}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) + Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2^*)]$
$2 \cdot S_{12} = \text{Im}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1) - Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1^*)]$	$2 \cdot S_{14} = \text{Im}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) - Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2^*)]$
$2 \cdot S_{21} = \text{Im}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1) + Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1^*)]$	$2 \cdot S_{23} = \text{Im}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) + Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2^*)]$
$2 \cdot S_{22} = \text{Re}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1^*) - Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1)]$	$2 \cdot S_{24} = \text{Re}[Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2^*) - Cov(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)]$

$2 \cdot S_{31} = Re[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1) + Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1^*) ]$	$2 \cdot S_{33} = Re[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2) + Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2^*) ]$
$2 \cdot S_{32} = Im[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1) - Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1^*) ]$	$2 \cdot S_{34} = Im[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2) - Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2^*) ]$
$2 \cdot S_{41} = Im[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1) + Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1^*) ]$	$2 \cdot S_{43} = Im[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2) + Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2^*) ]$
$2 \cdot S_{42} = Re[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1^*) - Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1) ]$	$2 \cdot S_{44} = Re[ Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2^*) - Cov(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2) ]$

Le développement des expressions ci-dessus démontre les égalités suivantes :

$$S_{13} = S_{31} \quad ; \quad S_{14} = S_{41} \quad ; \quad S_{23} = S_{32} \quad ; \quad S_{24} = S_{42}$$

En définitive, seules les quatre écritures suivantes sont à retenir. On remplacera « n<sub>1</sub> » et « n<sub>2</sub> » par les valeurs adéquates afin d'obtenir les différentes covariances de la matrice.

---


$$Re[ Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) + Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}^*) ] =$$


---

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n1 \cdot n2} \cdot \left[ \sum_{i=0}^k \left\{ \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot r_i^{n1+n2} \cdot \cos((n1+n2)\theta_i) + \dots \right. \right. \\ & \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \sum_{l=0}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \cos((n1-n2)\theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2,l}}{l+1} \right) + \dots \\ & \left. \left. i_i^2 \sum_{l=1}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \cos((n1-n2)\theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2,l}}{l+1} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

---


$$Im[ Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) - Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}^*) ] =$$


---

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n1 \cdot n2} \cdot \left[ \sum_{i=0}^k \left\{ \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot r_i^{n1+n2} \cdot \sin((n1+n2)\theta_i) - \dots \right. \right. \\ & \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \sum_{l=0}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \sin((n1-n2)\theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2,l}}{l+1} \right) - \dots \\ & \left. \left. i_i^2 \sum_{l=1}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \sin((n1-n2)\theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2,l}}{l+1} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$Im[ Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) + Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}^*) ] =$$


---

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n1 \cdot n2} \cdot \left[ \sum_{i=0}^k \left\{ \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot r_i^{n1+n2} \cdot \sin((n1+n2)\theta_i) + \dots \right. \right. \\ & \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \sum_{l=0}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \sin((n1-n2) \cdot \theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2 \cdot l}}{l+1} \right) + \dots \\ & \left. \left. i_i^2 \sum_{l=1}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \sin((n1-n2) \cdot \theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2 \cdot l}}{l+1} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$


---

$$Re[ Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}^*) - Cov(\mathbf{C}_{n1}, \mathbf{C}_{n2}) ] =$$


---

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{n1 \cdot n2} \cdot \left[ \sum_{i=0}^k \left\{ \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \cdot r_i^{n1+n2} \cdot \cos((n1+n2)\theta_i) - \dots \right. \right. \\ & \frac{(\Delta i_i)^2}{12} \sum_{l=0}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \cos((n1-n2) \cdot \theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2 \cdot l}}{l+1} \right) - \dots \\ & \left. \left. i_i^2 \sum_{l=1}^{\min(n1, n2)} \left( \binom{n1}{l} \binom{n2}{l} \cdot r_i^{(n1-l)+(n2-l)} \cdot \cos((n1-n2) \cdot \theta_i) \cdot \frac{\rho_i^{2 \cdot l}}{l+1} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$


---

## G : Evaluation de la matrice de covariance « S<sub>0</sub> » soit par la méthode de Monte-Carlo soit avec l'algorithme « Unscented Transform »

La matrice de covariance « S<sub>0</sub> » à évaluer pour le cas d'étude complet en trois dimensions traduit les variances et covariances du vecteur « X<sub>0</sub> » contenant les 48 coefficients harmoniques nécessaires à l'approximation du champ magnétique.

$$X_0 = [a_{1,0} \ a_{1,1} \ a_{1,-1} \ a_{2,0} \ \dots \ a_{n,m} \ \dots \ a_{6,-5} \ a_{6,6} \ a_{6,-6}]^T \quad (G.1)$$

Avec  $n \in [1 ; 6]$  et  $m \in [-n ; +n]$ .

La matrice « S<sub>0</sub> » est alors définit comme suit :

$$\begin{bmatrix} Var(a_{1,0}) & Cov(a_{1,0}, a_{1,1}) & \dots & Cov(a_{1,0}, a_{6,6}) & Cov(a_{1,0}, a_{6,-6}) \\ Cov(a_{1,-1}, a_{1,0}) & Var(a_{1,1}) & & & Cov(a_{1,1}, a_{6,-6}) \\ & & \ddots & & \\ Cov(a_{6,6}, a_{1,0}) & & & Var(a_{6,6}) & Cov(a_{6,6}, a_{6,-6}) \\ Cov(a_{6,-6}, a_{1,0}) & Cov(a_{6,-6}, a_{1,1}) & \dots & Cov(a_{6,-6}, a_{6,6}) & Var(a_{6,-6}) \end{bmatrix} \quad (G.2)$$

Pour obtenir cette matrice, nous avons réalisé une étude statistique du modèle physique (description géométrique des conducteurs électriques). A chaque tirage aléatoire des paramètres géométriques, le champ magnétique est calculé et les coefficients harmoniques (G.1) sont identifiés par un problème inverse numérique surdéterminé. On obtient alors une répartition statistique des coefficients harmoniques dont on calcul la variance et covariance.

Pour cela, nous avons mis en œuvre deux méthodes pour étudier l'influence de 49 points géométriques (soit 147 variables aléatoires) :

- Monte Carlo (noté MC) avec 10 000 calculs aléatoires (chaque tirage fait varier toutes les valeurs).
- Unscented Transform (note UT) avec 295 calculs déterministes (chaque tirage ne fait varier qu'une seule valeur).

Commençons par étudier la diagonale des matrices obtenues, c'est-à-dire des variances des coefficients harmoniques (48 valeurs). Pour cela, on calcule le ratio terme à terme (MC/UT) dont le résultat doit rester le plus proche possible de l'unité. Le Tableau G.1 recense la répartition de ces ratios.

<b>Entre 0,90 et 1,10</b>	<b>Entre 0,80 et 1,20</b>	<b>Entre 0,70 et 1,30</b>
62,5 %	83,3 %	100 %

**Tableau G.1 : Répartition des ratios (en valeur absolue) des variances des coefficients harmoniques**

On constate que la variance des coefficients harmoniques est plutôt bien estimée : près de 83 % des valeurs obtenues par l'algorithme « Unscented Transform » ne diffèrent au plus que de 20 % avec les valeurs obtenues par la méthode de Monte Carlo.

C'est un très bon résultat compte tenu du temps calcul nécessaire pour leur obtention. Monte Carlo a nécessité près de 4 heures alors que « Unscented Transform » a réalisé l'évaluation en moins de 10 minutes.

Continuons avec les covariances des coefficients harmoniques (1128 valeurs). Puisque la matrice « S<sub>0</sub> » est symétrique, nous ne nous concentrons que sur le triangle supérieur afin de comparer les deux résultats de l'évaluation statistique. Comme précédemment, on calcule le ratio (MC/UT) terme à terme et le Tableau G.2 recense la répartition des valeurs obtenues.

<b>Entre 0,75 et 1,25</b>	<b>Entre 0,25 et 1,75</b>	<b>Entre -0,25 et 2,25</b>
45,9 %	75,0 %	83,9 %

**Tableau G.2 : Répartition des ratios (en valeur absolue) des covariances des coefficients harmoniques**

L'évaluation de la covariance des coefficients harmoniques avec l'algorithme « Unscented Transform » présente plus d'écart avec la méthode de Monte Carlo : seulement 46 % des ratios ne diffèrent au plus que de 25 %.

Rappelons néanmoins que nous n'avons pas de référence analytique pour ce cas d'étude en trois dimensions. Il est ainsi impossible d'avoir plus confiance dans un résultat plutôt qu'un autre. On peut seulement dire que les deux matrices évaluées se ressemblent : les variances (valeurs de la diagonale) sont très proches et les grandes valeurs de covariances sont du même ordre de grandeur. Cependant, les valeurs obtenues par l'algorithme « Unscented Transform » semblent plus réduites.

La finalité n'étant pas l'obtention exacte de cette matrice de covariance mais plutôt d'évaluer ses principaux termes qui auront une influence dans l'approche Bayésienne du problème inverse, il est intéressant d'utiliser soit la matrice évaluée par la méthode de Monte Carlo, soit la matrice évaluée par l'algorithme « Unscented Transform » puis de comparer les résultats de l'identification.

Cette étude est réalisée sur un exemple purement numérique. Le modèle mesuré est celui présenté dans le chapitre IV (Figure IV.8) et l'information a priori provient du modèle correspondant (Figure IV.9).

Les coefficients harmoniques exacts sont déjà donnés dans le chapitre IV (répartition bleue sur la Figure IV.10 et la Figure IV.11). Pour l'étude qui nous intéresse ici, nous utilisons le même type de répartition virtuelle de capteurs tri-axes que celle donnée par la Figure IV.5.

Afin d'étudier l'influence de la matrice covariance  $S_0$ , le résultat du problème inverse par approche Bayésienne, le vecteur des coefficients harmoniques est mis en comparaison avec le vecteur exact. Pour cela, les ratios (MC/exact) et (UT/exact) des coefficients harmonique sont calculé puis, comme précédemment, on étudie la répartition des valeurs.

Le Tableau G.3 résume les résultats pour le premier ratio (MC/exact) et le Tableau G.4 donne les mêmes résultats pour le second ratio (UT/exact).

Entre 0,75 et 1,25	Entre 0,25 et 1,75	Entre -0,25 et 2,25
31,3 %	54,2 %	62,5 %

Tableau G.3 : Répartition des ratios (MC/exact) des coefficients harmoniques identifiés

Entre 0,75 et 1,25	Entre 0,25 et 1,75	Entre -0,25 et 2,25
29,2 %	45,8 %	60,4 %

Tableau G.4 : Répartition des ratios (UT/exact) des coefficients harmoniques identifiés

On remarque deux choses :

- Malgré les différences entre les deux matrices  $S_0$  évaluées, le résultat d'identification reste sensiblement le même.
- Le résultat d'identification est tout de même un peu meilleur avec la matrice  $S_0$  évaluée par la méthode de Monte Carlo car celle-ci contient des covariances plus élevées que celles évaluées avec l'algorithme « Unscented Transform ».

On peut néanmoins conclure sur le réel gain apporté par l'algorithme « Unscented Transform » pour nos besoins. En effet, celui-ci permet l'évaluation des principaux termes de la matrice de covariance  $S_0$  en très peu de calculs et l'utilisation de cette dernière dans l'approche Bayésienne du problème inverse conduit sensiblement au même résultat d'identification.

# Bibliographie

---





- [AHN 11] S. AHN, « Magnetic field design for high efficient and low EMF wireless power transfer in on-line electric vehicle », Proceeding in the 5th European Conference on Antenas and Propagation, 2011
- [ANGOT 72] A. ANGOT, « *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications* ». Edition Masson et Cie, 1972
- [ARDON 10] V. ARDON, « *Méthodes numériques et outils logiciels pour la prise en compte des effets capacitifs dans la modélisation CEM de dispositifs d'électronique de puissance* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 2010
- [BARCHANSKI 07] A. BARCHANSKI, « Large-scale calculation of low-frequency-induced currents in high-resolution human body models », IEEE Transactions on Magnetics, Vol.43, 2007.
- [BARTOLOMEO 07] V. BARTOLOMEO, « Cassini RADAR: investigation of titan's surface parameters by means of Bayesian inversion technique and gravity-capillary waves modelling of liquid hydrocarbons surfaces », IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2007
- [BAVASTRO 14] D. BAVASTRO, « Design of wireless power transmission for a charge while driving system », IEEE Transactions on Magnetics, Vol.50, 2014
- [BAYES 63] T. BAYES, « An essay towards solving a problem in the doctrine of chance ». Philosophical Transaction, The Royal Society, 1763.
- [BOHNERT 10] J. BOHNERT, « Effects of time varying currents and magnetic fields in the frequency range of 1kHz to 1MHz to the human body – A simulation study », IEEE Proceedings of 32nd annual international conference of engineering in medecine and biology society, 2010
- [BOSAVIT 93] A. BOSAVIT, « A theoretical approach to the question of biological effects of low frequency fields », IEEE Transactions on Magnetics, Vol.29, 1993
- [CAPDEROU 12] M. CAPDEROU, « *Satellites : de Kepler au GPS* ». Edition Springer Science & Business, 2012
- [CHADEBEC 00] O. CHADEBEC, « Modeling of static magnetic anomaly created by iron plates ». IEEE Transactions on Magnetics, Vol.36, 2000.
- [CHADEBEC 01] O. CHADEBEC, « *Modélisation du champ magnétique induit par des tôles. Identification de l'aimantation : Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 2001
- [CHADEBEC 06] O. CHADEBEC, « A Review of Magnetostatic Moment Method ». IEEE Transactions on Magnetics, Vol.42, No.4, 2006.
- [DEHAENE 12] S. DEHAENE, « *Introduction au raisonnement Bayésien et à ses applications* ». Cours du collège de France disponible à ce [lien](#), 2012.

- [DIETRICH 99] F.M DIETRICH, « *Survey and assessment of electric and magnetic field public exposure in the transportation environment* ». US Department of Transportation, Federal Railroad Administration, Report No.PB99-130908, 1999
- [DURAND 66] E. DURAND, « *Electrostatique, Tome 2, Problèmes généraux conducteurs* ». Edition Masson et Cie, 1964
- [DURAND 68] E. DURAND, « *Magnétostatique* ». Edition Masson et Cie, 1968
- [FERBER 13-a] M. FERBER DE VIERA LESSA, « Adaptive Unscented Transform for Uncertainty Quantification in EMC Large-Scale Systems ». The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, 2013
- [FERBER 13-b] M. FERBER DE VIERA LESSA, « *Méthodologies pour l'analyse des incertitudes paramétriques des convertisseurs de puissance* ». Mémoire de thèse de l'Université de Lyon, 2013
- [FRESCHI 10] F. FRESCHI, « Computation of eddy currents in human body due to pulsed magnetic field », Proceeding in 14th IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, 2010
- [GENTLE 07] J. GENTLE, « *Matrix algebra : Theory, Computations and Applications in Statistics* ». Edition Springer Science & Business Media, 2007
- [HADAMARD 32] J. HADAMARD, « *Le problème de Cauchy* ». Edition Hermann, 1932
- [HALGAMUGE 10] M.N. HALGAMUGE, « *Measurement and analysis of electromagnetic fields from trams, trains and hybrid cars* ». Radiation Protection Dosimetry, vol.141, no.3, 2010
- [HERPIN 68] A. HERPIN, « *Théorie du magnétisme* ». Institut national des sciences et techniques nucléaires, 1968
- [HULMANN 95] J. HULMANN, « *Dynamic map building and localization : New theoretical foundations* ». Mémoire de thèse, Université d'Oxford, 1995
- [ICNIRP 09] ICNIRP, « ICNIRP guidelines on limits of exposure to static magnetic fields ». HEALTH PHYSICS 96 : 504-514, 2009
- [ICNIRP 10] ICNIRP, « ICNIRP guidelines for limiting exposure to time-varying electric and magnetic fields ». HEALTH PHYSICS 99 : 818-836, 2010
- [JULIER 95] S.J JULIER, « A new approach for filtering nonlinear systems ». IEEE Proceedings of the American Control Conference, 1995
- [JULIER 97] S.J JULIER, « A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems ». Proceedings 11<sup>th</sup> International Symposium on Aerospace Defense Sensing, Simulation and Controls, 1997
- [JULIER 00] S.J JULIER, « A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in nonlinear filters ». IEEE Transaction on Automatic Control, 2000

- [JULIER 02] S.J JULIER, « The scaled Unscented Transformation ». Proceeding in American Control Conférence, 2002
- [JULIER 03] S.J JULIER, « Unscented filtering and nonlinear estimation ». Invited paper in Proceedings of the IEEE, 2003
- [JOKELA 00] K. JOKELA, « Restricting exposure to pulsed and broadband magnetic fields ». HEALTH PHYSICS 79 : 373-388, 2000
- [KARABETSOS 10] E. KARABETSOS, « EMF measurements in hybrid technology cars ». Proceedings 6<sup>th</sup> International Workshop on Biological Effects of Electromagnetic Fields, 2010
- [KAY 93] S. KAY, « *Fundamentals of statistical signal processing : Estimation theory, signal processing series* ». Prentice hall, 1993
- [KERADEC 91] J.P. KERADEC, « Multipolar development of vector potential for parallel wires. Application to the study of eddy currents effects in transformer windings ». IEEE Transactions on Magnetics, Vol.27, no.5, 1991
- [KERN 02] M. KERN, « *Problèmes inverses* ». Support de cours, Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de VINCI, disponible à ce [lien](#), 2002
- [KILDISHEV 98] A.V. KILDISHEV, « An advanced technique for the multipole imaging of a magnetic source: discrete transforms in high-precision magnetic signature processing ». IEEE Conference on Precision Electromagnetic Measurement, 1998
- [KILDISHEV 00] A.V. KILDISHEV, « Multipole imaging of an elongated magnetic source ». IEEE Transactions on Magnetics, Vol.36, no.5, 2000
- [KILDISHEV 02] A.V. KILDISHEV, « Multipole analysis of an elongated magnetic source by cylindrical sensor array ». IEEE Transactions on Magnetics, Vol.38, no.5, 2002
- [LAOUAMER 98] R. LAOUAMER, « *Chargeur de Batteries à Couplage Inductif pour Véhicule Electrique* ». Mémoire de thèse de l'Université de Grenoble, 1998
- [LEGAUT 05] G. LEGAUT, « *Ondes de torsion dans le noyau terrestre* ». Mémoire de thèse de l'Université Joseph Fourier, 2005
- [LE GOFF 11] A. LE GOFF, « *Contrôle et diagnostic par un réseau de capteurs magnétiques en automobile* ». Mémoire de thèse de l'Université de Grenoble, 2011
- [LEGRIS 96] M. LEGRIS, « *Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 1996
- [LE NY 12] M. LE NY, « *Diagnostic non invasif de piles à combustible par mesure de champ magnétique proche* ». Mémoire de thèse de l'Université de Grenoble, 2012

- [LOPEZ 11] P. FERNANDEZ LOPEZ, « *Modélisation du rayonnement électromagnétique des dispositifs électroniques pour des applications CEM* ». Mémoire de thèse de l'Université de Rouen, 2011
- [MARCHIDON 00] L. MARCHIDON, « *Mécanique quantique, physique générale* ». Edition De Boeck Supérieur, 2000
- [MILHAM 99] S. MILHAM, « Magnetic fields from steel-belted radial tires : implications for epidemiologic studies ». *Bioelectromagnetics*, vol.20, no.7, 1999
- [MISKIEWICZ 11] MISKIEWICZ, « Contactless battery charger with bi-directional energy transfer for plug-in vehicles with vehicle-to-grid capability ». *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2011
- [MITOLO 11] M. MITOLO, « Ecodesign of low-voltage systems and exposure to ELF magnetic fields », *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.47, 2011.
- [MOUSA 07] M.H. MOUSA, « *Calcul efficace et direct des représentations de maillage 3D utilisant les harmoniques sphériques* ». Mémoire de thèse de l'Université Claude Bernard, 2007
- [NGUYEN 11] T.S. NGUYEN, « Ships magnetic anomaly computation with integral equation and fast multipole method ». *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.47, No.5, 2011.
- [NOTARNICOLA 02] C. NOTARNICOLA, « Extraction of soil parameters: two case studies using Bayesian fusion of multiple sources data ». *IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2002
- [POUS 11] M. POUS, « EMI radiated characterization of an hybrid bus ». *Proceedings 10<sup>th</sup> International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2011
- [ROUVE 99] L.L ROUVE, « Application of the spherical harmonic model to identify the magnetic state of a system and extrapolate its signature ». *Applied Electromagnetics and Mechanics*, Amsterdam, the Netherlands: IOS Press, 1999
- [ROUVE 06] L.L ROUVE, « Optimal magnetic sensors location for spherical harmonic identification applied to electrical devices ». *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.42, No.4, 2006
- [ROBIN 57] L. ROBIN, « *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales* ». Gauthier-Villars, 1957
- [SCHMERBER 06] L.A. SCHMERBER, « *Identification et caractérisation de sources électromagnétiques : Application à la discrétion des moteurs de propulsion navale* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 2006
- [SCHMERBER 07] L.A. SCHMERBER, « Spherical harmonic identification using a priori information about an electrical device ». *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.43, no.4, 2007
- [SCHMID 09] G. SCHMID, « ELF and LF magnetic field exposure in hybrid and electric cars ». *Proceedings Bioelectromagnetics Conference*, 2009

- [SCHMIDT 99] D.M. SCHMIDT, « Bayesian inference applied to electromagnetic inverse problem ». Human Brain Mapping, Vol.7, No.3, 1999
- [SCHMIDT 00] D.M. SCHMIDT, « Spatial-temporal Bayesian inference for MEG/EEG ». Record on 34<sup>th</sup> Asilomar conference on Signals, Systems and Computers, 2000
- [SHIN 12] J. SHIN, « Contactless power transfer system for online electric vehicle (OLEV) ». IEEE Electric Vehicle Conference, 2012
- [STAMATI 13] T.E. STAMATI, « On-road charging of electric vehicles », Proceeding in IEEE Transportation Electrification Conference and Expo, 2013
- [STANKOWSKI 06] S. STANKOWSKI, « Low frequency magnetic fields induced by car tire magnetization ». HEALTH PHYSICS, vol.90, no.2, 2006
- [TARANTOLA 87] A. TARANTOLA, « *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* ». Edition Elsevier, 1987
- [TARANTOLA 05] A. TARANTOLA, « *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* ». Edition Siam, 2005
- [TIKHONOV 76] A. TIKHONOV, « *Méthodes de résolution de problèmes mal posés* ». Edition mir, Moscou, 1976
- [VINCENT 09] B. VINCENT, « *Identification de sources électromagnétiques multipolaires équivalentes par filtrage spatial : Application à la CEM rayonnée pour les convertisseurs d'électronique de puissance* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 2009
- [VUILLERMET 08] Y. VUILLERMET, « *Immunisation en boucle fermée – Application au sous-marin double coque. Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ proche* ». Mémoire de thèse de l'INP Grenoble, 2008
- [YAHYAOUÏ 11] W. YAHYAOUÏ, « *Caractérisation et modélisation des émissions rayonnées par le câblage des systèmes électroniques embarqués* ». Mémoire de thèse de l'Université de Paris Sud XI, 2011



---

**Titre :**

**Caractérisation, Modélisation et Identification de sources de champ magnétique dans un véhicule électrique**

---

**Mots clés :**

Mesure de champ magnétique, Caractérisation des sources, Modélisation magnétostatique, Problème inverse, Développements en harmoniques sphériques, Approche Bayésienne

---

**Résumé :**

Le véhicule électrique rassemble beaucoup d'équipements électrotechniques. Tous sont potentiellement source de champ magnétique dans l'habitacle : zone confinée où se trouvent les passagers. Il est illusoire de réaliser un modèle numérique complet tant le nombre de paramètres est important. Il est également impossible de placer des capteurs de champ partout à l'intérieur de l'habitacle. Après une étude approfondie des caractéristiques du champ magnétique mesuré dans l'habitacle, nous proposons d'allier modèle *a priori* et mesure de champ dans une approche Bayésienne du problème inverse. Basée sur le développement en harmonique sphérique du champ, l'apport d'information *a priori* oriente la solution et permet l'identification de nombreux paramètres avec très peu de mesure.

---

---

**Title :**

**Characterization, Modeling and Identification of magnetic field sources inside an electric vehicle**

---

**Key words :**

Magnetic field measurement, Sources characterization, Magnetostatic modeling, Inverse problem theory, Spherical harmonic decomposition, Bayes theorem

---

**Abstract :**

Electric vehicles have a lot of electrical devices onboard. All of them may generate electromagnetic field inside the car: a quite small space containing the passengers. A complete modeling of the vehicle can hardly be done because of the parameters number. The magnetic field measurement everywhere inside the car is also impossible. We first measure the magnetic field inside the car to study its characteristics. Then we propose to merge together *a priori* modeling with measurements into a Bayesian approach of the inverse problem. Based on spherical harmonic decomposition of the magnetic field, *a priori* information helps the resolution and gives the identified parameters with a very few measurements.

---

**G2Elab – Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble  
(UMR 5269 Grenoble-INP – UJF – CNRS)**

**Site principal ENSE3, bâtiment D  
11 rue des Mathématiques – BP46 - 38402 Saint Martin d'Hères – Cedex - France**